

1	Введение	7
---	----------	---

I		24
---	--	----

2	Скорость роста функций	20
---	------------------------	----

3	Суммирование	38
---	--------------	----

4	Рекуррентные соотношения	48
---	--------------------------	----

5	Множества	7
---	-----------	---

6	Комбинаторика и вероятность	96
----------	------------------------------------	-----------

II		132
-----------	--	------------

7	Сортировка с помощью кучи	136
----------	----------------------------------	------------

8	Быстрая сортировка	148
----------	---------------------------	------------

9	Сортировка за линейное время	160
----------	-------------------------------------	------------

10	Медианы и порядковые статистики	180
-----------	--	------------

II	192
1 Элементарные структуры данных	197
2 Хеш-таблицы	217
3 Двоичные деревья поиска	242
4 Красно-чёрные деревья	262
5 Пополнение структур данных	280
V	296
6 Динамическое программирование	299

17 Жадные алгоритмы	320
----------------------------	------------

18 Амортизационный анализ	352
----------------------------------	------------

V	372
----------	------------

19 Б-деревья	370
---------------------	------------

20 Биномиальные кучи	394
-----------------------------	------------

21 Фибоначчиевы кучи	413
-----------------------------	------------

22 Системы непересекающихся множеств	434
---	------------

23 Алгоритмы на графах	452
-------------------------------	------------

24	Минимальные покрывающие деревья	481
25	Кратчайшие пути из одной вершины	493
26	Кратчайшие пути для всех пар вершин	522
27	Максимальный поток	540
28	Сортирующие сети	586
29	Арифметические схемы	607

31 Матрицы и действия с ними **659**

33 Теоретико-числовые алгоритмы **712**

RSA

34 Поиск подстроки **757**

35 Вычислительная геометрия

787

36 NP-полнота

811

NP

NP

NP

37 Приближенные алгоритмы

850

Студентам:

•

•

Программистам

Ошибки

Introduction to Algorithms

MIT Laboratory for Computer Science
Technology Square
Cambridge Massachusetts

algorithms theory lcs mit edu
help

Subject

!
algor mccme ru

Благодарности

Lorrie Lejeune McGraw Hill David Shapiro

Larry Cohen

Leicerson Gail Rivest

Alex Christopher Rivest

Alex Rivest

Nicole Cormen Lina Luo

Ricky William Debby Leicerson

,

(THOMAS H. CORMEN
(CHARLES E. LEISERSON
(RONALD L. RIVEST)

1990

От переводчиков:

1.1.

Алгоритм algorithm

исходные данные input

результат

таблица

output

вычислительных

задач computational problems

задачу сортировки sorting problem

лемма

Вход:

$$n \qquad a_1, a_2, \dots, a_n$$

Выход:

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_n$$
$$a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$$

, , , , ,
, , , , ,

правильным correct

решает solves

псевдокода pseu

locode

Сортировка вставками

Сортировка вставками insertion sort

$j -$ A_j

Ісев докод

```

while
    for
        if-then-else
        begin    end

```

```
while for repeat           if then else
```

▶

$$\begin{array}{c}
 i \leftarrow j \leftarrow e \\
 e \qquad \qquad \qquad j \leftarrow e \quad i \leftarrow j \\
 i, j, key
 \end{array}$$
$$A = \{A_i, A_j, \dots, A_n\}$$

полей	fields
атрибутов	attributes

$$\frac{\text{length } A}{\text{length } B} = \frac{\text{length } A}{\text{length } A} = 1$$
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & y \leftarrow x \\
 & & & & & & \\
 f & & & f\ y & f\ x & & \\
 & f\ x & \leftarrow & & & f\ x & \\
 & & & y \leftarrow x & & x & y
 \end{array}$$

NIL

по значению by value

x

$x \leftarrow y$

$f\ x \leftarrow$

Упражнения

1.1-1

INSERTION-SORT A $\quad , \quad , \quad , \quad , \quad ,$

1.1-2

INSERTION-SORT

1.1-3

задачу поиска

Вход: n A $a_1, a_2, \dots, a_n$ v

Выход: i v $A\ i$

NIL v A

линейного поиска linear search

A v

1.1-4

n

n A B

n C

1.2.

машина с

произвольным доступом random access machine RAM

Сортировка вставками: анализ

размер входа input size

Временем работы running time

x

ВЫЗОВ call

исполнение execution

INSERTION-SORT

j n

$length\ A$

t_j

INSERTION-SORT A

for $j \leftarrow$ **to** $length\ A$

c_1 n

do $key \leftarrow A[j]$

c_2 $n -$

$\triangleright$ $A[j]$

$\triangleright$ $A[\dots j -$

$n -$

$i \leftarrow j -$

c_4 $n -$

while i and $A[i] < key$

c_5 $\sum_{j=2}^n t_j$

do $A[i+1] \leftarrow A[i]$

c_6 $\sum_{j=2}^n t_j$

!

$$T\ n = c_1n + c_2\ n - c_4\ n - c_5\sum_{j=2}^n t_j + c_6\sum_{j=2}^n t_j - c_7\sum_{j=2}^n t_j - c_8\ n - \dots$$

n

n

INSERTION-SORT

$$A[i] \leq key \qquad i = j -$$

t_j

$$T\ n = c_1n + c_2\ n - c_4\ n - c_5\ n - c_8\ n - c_1 - c_2 - c_4 - c_5 - c_8\ n - c_2 - c_4 - c_5 - c_8 \dots$$

$T\ n$

n

линейной

$$\text{функцией} \quad \text{linear function} \quad n \quad T\ n = an + b \\ a \quad b \\ c_1, \dots, c_8$$

$A[j]$

$$t_j = j$$

$$A = \dots A[j] -$$

$$\sum_{j=2}^n j = \frac{n(n-1)}{2} + 1, \qquad \sum_{j=2}^n j = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$T\ n = c_1n + c_2\ n - c_4\ n - c_5\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right) + c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_8\ n - \left(\frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2}\right)n^2 + \left(c_1 - c_2 - c_4 - \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2} - c_8\right)n - \dots$$

$T\ n$

квадратичная

quadratic function

Время работы в худшем случае и в среднем

время работы в худшем случае worst case running time

-
-
-

n

INSERTION

SORT

$A[j]$
 T_n

t_j

n

$A[j] -$
 j

среднее вре

ия работы average case running time expexted running time

Порядок роста

INSERTION-SORT

c_i

i
 $an^2 - bn - c$

порядок роста rate of growth order of growth n^2

Упражнения

1.2-1

n

сортировкой выбором selection sort

Θ

1.2-2

Θ

1.2-3

$\Theta \ n \log n$

$x_1, x_2, \dots, x_n$

1.2-4

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$

x

$\Theta \ n^2$

$\Theta \ n$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad \dots \quad a_{n-1} x \quad a_{n-2} x \quad \dots \quad a_1 x \quad a_0.$$

1.2-5

n^3

$-$

$n^2 - n$

Θ

1.2-6

1.3.

по шагам incremental approach

3.1. Принцип «разделяй и властвуй»

рекурсивны recursive algorithms

MERGE A, p, q, r
 A p, q, r

$p \leq q \leq r$

1 $n = q - p + 1$ 4 $n = q - p + 1$ r сливает merges

sorted sequence
 merge
 initial sequence

Рис. 1.3

$$A = \langle 5, 2, 4, 6, 1, 3, 2, 6 \rangle.$$

```

MERGE-SORT  $A, p, r$ 
  if  $p \leq r$ 
    then  $q \leftarrow \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ 
         MERGE-SORT  $A, p, q$ 
         MERGE-SORT  $A, q+1, r$ 
         MERGE  $A, p, q, r$ 

```

MERGE-SORT $A, 1, \text{length } A$ $n = \text{length } A$

n
 n

1.3.2. Анализ алгоритмов типа «разделяй и властвуй»

$$n \qquad T_n \qquad aT_n + b \qquad \frac{T_n}{D_n} \qquad C_n$$

$$n$$

$$n$$

Анализ сортировки слиянием

n

$$\Theta \qquad \Theta_n$$

$$T_n = \begin{cases} \Theta_n, & n \\ T_n + \Theta_n, & n \end{cases}$$

T_n

$$\Theta_n \log n \qquad \log$$

n

$$\Theta_n^2$$

Упражнения

1.3-1

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$$

1.3-2

$$\text{MERGE } A, p, q, r$$

1.3-3

$$T_n = \begin{cases} n, & n \\ T_n + n^k, & n^k \end{cases}$$

$$T_n = n \log n \qquad n$$

1.3-4

1.3-5

ДВОИЧНЫМ ПОИСКОМ

1.3-6

while

INSERTION-SORT

$A[0..j] -$

$\Theta(\log n)$

$\Theta(n \log n)$

1.3-7

$S[n]$

x

$\Theta(n \log n)$

S

Замечания

n^2

$n \log n$

$6 \cdot 2$

8

$\approx$

$6 \log 6$

Упражнения

1.3-1

n

n^2

$n \log n$

1.3-2

n^2

n

n

1-1 Сравнение времени работы

n

f

n

t

$\log n$							
$\frac{n}{n}$							
n							
$n \log n$							
n^2							
n^3							
n							
$n!$							

1-2 Сортировка вставками для коротких кусков

1-3 Число инверсий

$A[1..n]$

$i < j$

n
инверсий
 $A[i] > A[j]$
inversions

, , , ,

n

n

$\Theta(n \log n)$

J von Neumann

EDVAC

Скорость роста функций

$$n^2$$

$$n \lg n$$

$$n$$

асимптотику

asymptotic

total efficiency

2.1.

Θ -обозначение

$f_1\ n\ \qquad f_2\ n\ !$
 $\Theta\ g\ n$
 $f\ n\ \qquad g\ n$
 асимптотически неотрицательны
 n
 $f\ g$
 $c_1\ \qquad c_2$
 n_0
 n
 $f\ n\ \qquad \Theta\ g\ n$
 $g\ n$
асимпто-
 тически точной
 $f\ n\ \qquad \Theta\ g\ n$
 $g\ n\ \qquad \Theta\ f\ n$
 $n^2 -\ n$
 $\Theta\ n^2$
 c_1, c_2
 n_0
 $c_1 n^2 \leqslant -n^2 -\ n \leqslant c_2 n^2$
 $n\ \qquad n_0$
 n^2
 $c_1 \leqslant - - \frac{}{n} \leqslant c_2$
 c_2
 n_0
 c_1
 $n^3 \leqslant c_2 n^2$
 $n^3 / \Theta\ n^2$
 $c_2\ \ n_0$
 $n\ \ n_0$
 $n \leqslant c_2$
 $n\ \ n_0$
 a, b, c
 a
 $f\ n\ \qquad \frac{c_1}{a n^2} \ \frac{c_2}{b n} \ \qquad c$
 $f\ n\ \qquad \Theta\ n^2$

O - и Ω -обозначения

$$f \sim n \quad \Theta$$

$$cg \sim n \quad n$$

$$c$$

$$n \quad n_0$$

Теорема 2.1.

O- и ω-обозначения

$$\begin{aligned}
 & f(n) = O(g(n)) \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c g(n) \\
 & f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \\
 & f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n)) \\
 & f(n) = \Omega(g(n)) \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \geq c g(n) \\
 & f(n) = \omega(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \\
 & f(n) \leq O(g(n)) \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c g(n) \\
 & f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(f(n)) \iff f(n) = \Theta(g(n)) \\
 & f(n) = \Omega(g(n)) \iff g(n) = O(f(n)) \\
 & f(n) = \omega(g(n)) \iff g(n) = o(f(n)) \\
 & f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n))
 \end{aligned}$$

Сравнение функций

Транзитивность:

$$\begin{array}{llll}
 f(n) = \Theta(g(n)) & g(n) = \Theta(h(n)) & f(n) = \Theta(h(n)) \\
 f(n) = O(g(n)) & g(n) = O(h(n)) & f(n) = O(h(n)) \\
 f(n) = \Omega(g(n)) & g(n) = \Omega(h(n)) & f(n) = \Omega(h(n)) \\
 f(n) = o(g(n)) & g(n) = o(h(n)) & f(n) = o(h(n)) \\
 f(n) = \omega(g(n)) & g(n) = \omega(h(n)) & f(n) = \omega(h(n))
 \end{array}$$

Рефлексивность:

$$f(n) = \Theta(f(n)) \quad f(n) = O(f(n)) \quad f(n) = \Omega(f(n))$$

Симметричность:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n))$$

Обращение:

$$\begin{aligned}
 a &\leq b & a &\leq b & a &\leq b \\
 f(n) &= O(g(n)) & f(n) &= \Omega(g(n)) & f(n) &= \Theta(g(n)) \\
 f(n) &\sim g(n) & n^{1+\sin n} & \\
 a &\leq b & a &\leq b & a &\leq b \\
 f(n) &= O(g(n)) & f(n) &= o(g(n)) & f(n) &= \Theta(g(n))
 \end{aligned}$$

Упражнения

$$\begin{aligned}
 2.1-1 \quad & f(n) \sim g(n) \\
 & \max \{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1-2 \quad & n^a \sim n^b \iff a = b \\
 & a < b \implies n^a = o(n^b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1-3 \quad & O(n^2) \subset A
 \end{aligned}$$

$$2.1-4 \quad n^{n+1} = O(n^{2n}) \quad 2n = O(n)$$

$$2.1-5$$

$$\begin{aligned}
 2.1-6 \quad & f(n) = O(g(n)) \iff f(n) / o(g(n)) = f(n) / \Theta(g(n)) \\
 & f(n) \sim g(n)
 \end{aligned}$$

$$2.1-7 \quad f(n) = o(g(n)) \iff f(n) = \omega(g(n))$$

$$2.1-8$$

$$\begin{aligned}
 f(m, n) &= O(g(m, n)) & n_0, m_0 & \\
 &\leq f(m, n) \leq cg(m, n) & n & \geq n_0, m \geq m_0 \\
 &\Theta(g(m, n)) & \Omega(g(m, n)) &
 \end{aligned}$$

2.2.

Монотонность

$f(n)$ монотонно возрастает is monotone increasing

f n **монотонно убывает** is monotonically decreasing
 f m f n $m \leq n$ f n **строго**
возрастает is strictly increasing f m f n $m < n$
 f n **строго убывает** is strictly decreasing f m f n $m < n$

Целые приближения снизу и сверху

x the floor of x
 x the ceiling of x

$x -$ $x \leq x \leq x$ x

n n n

a b x

x a b x ab

x a b x ab

$n \leq z$ $n \leq z$
 $x \mapsto x$ $x \mapsto x$

Многочлены

d n polynomial in n of degree d

p n $\sum_{i=0}^d a_i n_i$

d $a_0, a_1, \dots, a_d$ **стар-**
коэффициентами coefficients **коэффициент** a_d

$$a_d \qquad \qquad \qquad p \ n$$

$$p \ n$$

$$\Theta \ n^d$$

$$a$$

$$n \mapsto n^a$$

$$a \leq$$

ально ограничена

$$f \ n \qquad n^{O(1)}$$

$$f \ n \quad \text{полиноми}$$

$$f \ n \qquad O \ n^k$$

$$k$$

Экспоненты

$$m \ n \qquad a \ /$$

$$a^0 \qquad , \qquad a^{m \ n} \qquad a^{mn} \ ,$$

$$a^1 \qquad a, \qquad a^{m \ n} \qquad a^{n \ m},$$

$$a^{-1} \qquad a, \qquad a^m a^n \qquad a^{m+n} \ .$$

$$a$$

$$n \mapsto a^n$$

$$0$$

$$n \mapsto a^n$$

exponential

$$a$$

$$b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n}$$

$$n^b \qquad o \ a^n$$

$$e \qquad , \qquad \dots$$

$$e^x \qquad x \qquad \frac{x^2}{!} \qquad \frac{x^3}{!} \qquad \dots \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$k! \qquad \cdot \cdot \cdot \dots \cdot k$$

$$x$$

$$e^x \qquad x$$

$$x$$

$$x \leq$$

$$e^x$$

$$x \leq e^x \leq \qquad x \qquad x^2$$

$$e^x \qquad x \qquad \Theta \ x^2 \qquad x \rightarrow$$

$$\Theta$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow$$

$$x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \qquad e^x$$

Логарифмы

$$\begin{aligned}\lg n &= \log_2 n \\ \ln n &= \log_e n \\ \lg^k n &= \lg n^k, \\ \lg \lg n &= \lg \lg n\end{aligned}$$

$$\lg n^k = k \lg n \qquad \lg n^k = k \lg n \qquad \lg n^k = k \lg n \qquad b \qquad n \mapsto \log_b n$$

$$n$$

$$\begin{aligned}\log_c a &= b^{\log_b a}, \\ \log_c ab &= \log_c a + \log_c b, \\ \log_b a^n &= n \log_b a, \\ \log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b}\end{aligned}$$

$$\log_b a = -\log_b a$$

$$\log_b a = \overline{\log_a b}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$O \log n$$

$$\lg$$

$$x$$

$$\ln \quad x \quad x - \frac{x^2}{2} \quad \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} \quad \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$x \quad -$$

$$\frac{x}{x} \leq \ln \quad x \leq x$$

$$x$$

$$f(n) \text{ ограничена полилогарифмом } \text{ is polynomially bounded } f(n) = \lg^{O(1)} n$$

$$n \lg m = a^c$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lg^b m}{c \lg m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lg^b m}{m^c}$$

Факториалы

$n!$ — n факториал”

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

n факториала формулой Стирлинга Stirling's approximation

$$n! \sim \sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} n! &= o(n^n), \\ n! &= \omega(n^n), \\ \lg n! &= \Theta(n \lg n). \end{aligned}$$

$$\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)}.$$

Итерации логарифма

$\log^* n$ — итерированным логарифмом

iterated logarithm

$$\lg^{(0)} n = n, \quad \lg^{(i)} n = \lg \lg^{(i-1)} n, \quad \lg^{(i)} n = \lg^i n$$

$$\lg^{(i)} n \leq \lg^* n$$

$$\lg^* n$$

$$\begin{aligned} \lg^* n &= \lg^* n, \\ \lg^* n &= \lg^* n, \\ \lg^* n &= \lg^* n, \\ \lg^* n &= \lg^* n, \\ \lg^* n &= \lg^* n. \end{aligned}$$

Числа Фибоначчи

чисел Фибоначчи Fibonacci numbers

$$F_0, F_1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad i$$

$$, , , , , , , , , , , \dots$$

ratio φ золотого сечения golden φ

$$\varphi = \frac{\quad}{\quad}, \dots,$$

$$\varphi = \frac{\quad}{\quad} - , \dots$$

$$F_i = \frac{\varphi^i - \varphi^{-i}}{\quad}$$

$$\varphi^i - \varphi^{-i} = F_i \varphi$$

Упражнения

2.2-1 $f(n) = g(n) + f(g(n))$ $f(n) = g(n) + f(g(n))$ $f(n) = g(n) + f(g(n))$

2.2-2 $T(n) = n^{O(1)}$ $T(n) = O(n^k)$

2.2-3

2.2-4 $\lg n! = \Theta(n \lg n)$ $n! = o(n^n)$

2.2-5 $\lg \lg n!$

2.2-6 $n \lg \lg^* n = \lg^* \lg n$

2.2-7

2.2-8

i

φ

F_{i+2}

φ

2-1 Асимптотика многочленов

$$\begin{array}{l} p(n) = a_0 + a_1 n + \dots + a_d n^d \\ a_d \neq 0 \end{array} \quad d$$
$$\begin{array}{l} p(n) = O(n^k) \quad k \leq d \\ p(n) = \Omega(n^k) \quad k \leq d \\ p(n) = \Theta(n^k) \quad k = d \\ p(n) = o(n^k) \quad k < d \\ p(n) = \omega(n^k) \quad k < d \end{array}$$

2-2 Сравнение асимптотик

$$k \leq \varepsilon \leq c \quad A \sim O \sim o \sim \Omega \sim \omega \sim \Theta \sim E$$

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^ε					
n^k	c^n					
$\overline{n}$	$n^{\sin n}$					
n	n^2					
$n^{\lg m}$	$m^{\lg n}$					
$\lg n!$	$\lg n^n$					

2-3 Сравнение скорости роста

O

Θ

$$\begin{array}{l} \lg \lg^* n \sim \lg^* n \sim \lg n \sim n^2 \sim n! \sim \lg n! \\ \ln \ln n \sim \lg^* n \sim n \cdot n \sim n^{\lg \lg n} \sim \ln n \sim \overline{\lg n} \\ \lg n \sim \lg \lg n \sim e^n \sim \lg n \sim n! \sim \overline{\lg n} \end{array}$$

i

$$f^{(i)}(n) \leq c$$

 f_c^* n c

$$\frac{f}{f_c^*}(n)$$

$$f(n)$$

 c

$$f_c^*$$

$f(n) \leq c$	$f_c^*(n)$
$\lg n$	
$n -$	
n	
n	
$\overline{n}$	
$\overline{n}$	
$n^{1/3}$	
$n \lg n$	

for while

j

j

$$\sum_{j=1}^n j,$$

$$\Theta \ n^2$$

3.1.

$$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$$

$$\sum_{k=1}^n a_k.$$

n

ряда series

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$

converges расходится
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится
 convergent series абсолютно сходящимся absolute

Линейность

$$\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

Арифметические прогрессии

$$1, 2, 3, \dots, n$$

арифметической прогрессией arithmetic series

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Геометрические прогрессии

x / геометрической прогрессии geometric

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

x

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Гармонический ряд

$$\dots \quad n \quad \dots \quad n$$

n th harmonic number

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Почленное интегрирование и дифференцирование

x

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Суммы разностей

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

$$\sum_{k=1}^n a_k - a_{k-1} = a_n - a_0$$

telescoping series

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Произведения

$$a_1, \dots, a_n$$

$$\prod_{k=1}^n a_k.$$

$$n \qquad \text{defn} \qquad \text{product}$$

$$\lg \prod_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \lg a_k.$$

Упражнения

$$\textbf{3.1-1} \qquad \sum_{k=1}^n k =$$

$$\textbf{3.1-2} \qquad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = O(n^2)$$

$$\textbf{3.1-3} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\textbf{3.1-4} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\textbf{3.1-5}$$

$$\textbf{3.1-6}$$

$$\textbf{3.1-7} \qquad \prod_{k=1}^n k = \frac{n!}{2} = \frac{n^2}{2}$$

$$\textbf{3.1-8} \qquad \prod_{k=1}^n k = \frac{n!}{2} = \frac{n^2}{2}$$

Индукция

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \\
 \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
 \sum_{k=0}^n k &\leq c \cdot n \\
 \sum_{k=0}^0 k &\leq c \\
 \sum_{k=0}^{n+1} k &\leq c \cdot (n+1) \\
 \left(-\frac{1}{c}\right) c^{n+1} &\leq c^{n+1} \\
 \sum_{k=0}^n k &= O(n^2) \\
 \sum_{k=1}^1 k &= O(n) \\
 \sum_{k=1}^{n+1} k &= O(n) \quad \text{неверно!} \quad O(n^2) \\
 O(n) &= O(n)
 \end{aligned}$$

Почленные сравнения

$$\sum_{k=1}^n k$$

$$\sum_{k=1}^n k \leqslant \sum_{k=1}^n n \quad n^2.$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \leqslant n a_{\max},$$

$$a_{\max} \qquad a_1,\ldots,a_n$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \qquad k \qquad r \qquad a_k \leqslant a_0 r^k$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k \qquad a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k \qquad a_0 \frac{1}{1-r}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$$

$$\frac{k^{-(k+1)}}{k^{-k}} = \frac{k}{k} \leqslant -$$

$$k \qquad k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} - \cdot \left(-\right)^k = - \cdot \frac{2}{3}$$

$$r$$

$$k \qquad \frac{k}{k+1}$$

$$\sum_{\frac{1}{L}}^{\infty} \lim \sum_{\frac{1}{L}}^n \lim \Theta \lg n = \infty$$

Разбиение на части

$$O\ n^2\qquad \sum_{k=1}^n k\qquad \sum_{k=1}^n k\qquad n$$

$$\sum_{k=1}^n k\qquad \sum_{k=1}^{n-2} k\qquad \sum_{k=n-2+1}^n k\qquad \sum_{k=1}^{n-2}\qquad \sum_{k=n-2+1}^n \frac{n}{}\qquad \left(\frac{n}{}\right)^2.$$

$$\qquad\qquad\qquad k_0$$

$$\sum_{k=0}^n a_k\qquad \sum_{k=0}^{k_0} a_k\qquad \sum_{k=k_0+1}^n a_k\qquad \Theta\qquad \sum_{k=k_0+1}^n a_k.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k}$$

$$\frac{k^2-k^{k+1}}{k^2}\qquad \frac{k^2}{k^2}$$

$$k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k}\qquad \sum_{k=0}^2 \frac{k^2}{k}\qquad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2}{k} \leqslant O\qquad -\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\right)^k\qquad O\qquad ,$$

Сравнение с интегралами

$$\sum_{k=m}^n f(k)$$

$$\int_{m-1}^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_m^{n+1} f(x) dx$$

$$\int_m^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_{m-1}^n f(x) dx$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \ln n$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$$

Упражнения

3.2-1

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$$

3.2-2

ис. 3.1

$$\sum_{k=m}^n f(k)$$

()

,

$$\int_{m-1}^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=m}^n f(k). \quad ()$$

$$\sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_{m-1}^{n+1} f(x) \, dx$$

3.2-3 n

$$\Omega \lg n$$

3.2-4

$$\sum_{k=1}^n k^3$$

3.2-5

3-1 Оценки для сумм

$$\begin{aligned} & r & s \\ \sum_{k=1}^n k^r & \\ \sum_{k=1}^n \lg^s k & \\ \sum_{k=1}^n k^r \lg^s k & \end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения

ренес **рекуррентными** recur

MERGE-SORT

$$T_n = \begin{cases} \Theta(1), & n=1 \\ T_{\lfloor n/2 \rfloor} + \Theta(n), & n>1 \end{cases}$$

$$T_n = \Theta(n \lg n)$$

Θ

O

метод подстановки substitution

method

метод

итераций iteration method

$$T_n = aT_{\lfloor n/b \rfloor} + f(n),$$

$$a \geq 1, b > 1, f(n) \geq 0$$

основной те

оремой о рекуррентных соотношениях master theorem

Технические детали

Sort
 n

T_n

$$T_n = \left\{ \begin{array}{l} \Theta \\ T_n \end{array} \right\}, \quad T_n = \Theta_n, \quad n$$

$$T_n = \Theta_n$$

$$T_n = T_n = \Theta_n.$$

T

$$T_n$$

$$T(n) \leq cn \lg n$$

Как отгадать оценку?

Аналогия.

$$T(n) = T(n/2) + n.$$

$$T(n) = O(n \lg n)$$

Последовательные приближения.

$$T(n) = \Omega(n^2)$$

Безопасно

$$\begin{aligned}
 & T_n \leq b + c \\
 & T_n \leq c n - b + c n - b \\
 & c
 \end{aligned}$$

Как делать не надо

$$\begin{aligned}
 T_n &\leq c n + n \\
 c
 \end{aligned}$$

Замена переменных

$$T_n = n$$

$$S_m = T_n = n^m$$

Упражнения

$$4.1-1 \quad T_n = T_{n/2} + T_{n/2} + T_n$$

$$O(\lg n)$$

$$4.1-2 \quad T_n = T_{n/2} + T_{n/2} + n \quad T_n$$

$$\Omega(n \lg n) \quad T_n = \Theta(n \lg n)$$

$$4.1-3 \quad n$$

$$4.1-4 \quad \Theta(n \lg n)$$

$$4.1-5 \quad T_n = T_{n/2} + T_{n/2} + n \quad T_n$$

$$O(n \lg n)$$

$$4.1-6 \quad T_n = T_{\overline{n}}$$

$$i \leq \log_4 n$$

$$\log_4 n$$

$$T(n) \leq n + n$$

$$\leq n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^i = n \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = n \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n^2}{n-1} = O(n^2)$$

$$O(n)$$

$$n^k$$

Деревья рекурсии

деревья рекурсии

Total

ис. 4.1

$$() \lg n (\frac{T(n) = 2T(n/2) + n^2.}{\lg n + 1}) .$$

ис. 4.2

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) + n$$

n

$$n \rightarrow \quad n \rightarrow \quad {}^2n \rightarrow \cdots \rightarrow \quad k \quad \log_3 {}_2n$$

$$k$$

$$O \ n \lg n \quad T \ n$$

Упражнения

4.2-1

 $T \ n$

$$T \ n \quad n$$

$$T \ n$$

4.2-2

 $T \ n$

$$T \ n \quad T \ n \quad n \quad T \ n \quad \Omega \ n \lg n$$

4.2-3

$$T \ n \quad T \ n \quad n$$

$$T \ n$$

4.2-4

 $T \ n \quad T \ n -$

$$a \quad T \ a \quad n \quad a$$

4.2-5

 $T \ n$

$$T \ \alpha n \quad T \ - \alpha \ n \quad n \quad \alpha$$

 α

$$T(n, b) = T(n/b, b) + T(n/b, b) + \dots + T(n/b, b) + f(n)$$

Основная теорема о рекуррентных оценках

Теорема 4.1. Пусть a, b — натуральные числа, $a > b$, $f(n)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$, тогда $T(n) = O(n^{\log_b a})$.
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, тогда $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$, тогда $T(n) = \Theta(f(n))$.

$$f(n) = n^{\log_b a}$$

$$T(n)$$

$$\Theta(n^{\log_b a} \lg n) = \Theta(f(n) \lg n)$$

$$\frac{f(n)}{n^\varepsilon}$$

$$f(n)$$

$$\frac{n^{\log_b a}}{n^\varepsilon} = n^{\log_b a - \varepsilon}$$

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

$$n^{\log_b a}$$

$$f(n)$$

Применения основной теоремы

$$T(n) = T(n/2) + n.$$

$$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n \Rightarrow T(n) = O(n \lg^2 n)$$

$$\begin{aligned}
 f(n) &= O(n^{\log_3 9 - \varepsilon}) = \varepsilon \\
 T(n) &= \Theta(n^2) \\
 T(n) &= T(n) \\
 a &= b \\
 f(n) &= n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 \\
 f(n) &= \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta \\
 T(n) &= \Theta(\lg n) \\
 T(n) &= T(n) = n \lg n \\
 n^{\log_4 3} &= O(n^{0.793}) \\
 b &= f(n) = n \lg n \\
 \varepsilon &\approx \frac{1}{n} \\
 n \lg n &\leq n \lg n = cf(n) = c \\
 T(n) &= \Theta(n \lg n) \\
 T(n) &= n \lg n \\
 f(n) &= n \lg n \\
 a &= b \\
 f(n) &= n \lg n = n^{\log_b a} = n \\
 f(n) &= n^{\log_b a} = n \lg n = n \lg n \\
 n^\varepsilon &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

Упражнения

4.3-1

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(n) = n \\
 T(n) &= T(n) = n^2 \\
 T(n) &= T(n) = n^3
 \end{aligned}$$

4.3-2

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(n) = n^2 \\
 T'(n) &= aT'(n) = n^2 \\
 A' &= A
 \end{aligned}$$

4.3-3

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(n) = \Theta \\
 T(n) &= \Theta(\lg n)
 \end{aligned}$$

4.3-4

4.4

4.1

$$n \qquad \qquad \qquad b$$

$$b$$

$$T_n = O(n^2)$$

4.4.1. Случай натуральных степеней

$$T_n \quad b$$

$$T_n \quad aT_n \quad b \quad f_n .$$

$$T$$

Лемма 4.2. $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
 $\int_{\mathbb{R}^n} a \cdot \nabla f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} a(x) dx$.

$$\frac{T_n}{T_n - aT_n b} = \frac{f_n}{n} = \frac{T}{n}.$$

$$T \leq \log_2 a \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} i c_{i+1} + i i$$

$$a^j f(n) b^j$$

$$\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n) b^j.$$

$$\Theta(n^{\log_b a})$$

Лемма 4.3. Пусть a, b — натуральные числа, $f(n) \in \mathcal{O}(n^c)$, $c < \log_b a$. Тогда

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n) b^j$$

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, $\varepsilon > 0$,
тогда $g(n) = O(n^{\log_b a})$.
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. $a f(n) b \leq c f(n)$, $c < a$,
тогда $g(n) = \Theta(f(n))$.

$$f(n) = n^\alpha, \quad \alpha < \log_b a - \varepsilon$$

$$g(n) = f(n) + a f(n) b + a^2 f(n) b^2 + \dots + a^{k-1} f(n) b^{k-1}$$

$$n^\alpha + a n b^{-\alpha} + a^2 n b^{2-\alpha} + \dots + a^{k-1} n b^{k-1-\alpha}$$

$$k = \log_b n$$

$$\alpha = \log_b a - b^\alpha = a$$

$$\mathcal{O}(n^k) = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$$

$$\begin{aligned} g(n) &= f(n) - af(n/b) + a^2f(n/b^2) - \dots \\ &= n^\alpha - a(n/b)^\alpha + a^2(n/b^2)^\alpha - \dots, \end{aligned}$$

$$\alpha = \log_b a \qquad \log_b n$$

$$n^{\log_b a} \log_b n = \Theta(n^{\log_b a} \lg n).$$

$$f$$

$$c$$

$$c - c$$

$$b \qquad g(n) = \Theta(f(n)) \qquad n \qquad \square$$

$$n \qquad b$$

$$\text{Лемма 4.4.} \qquad a \qquad , \qquad b \qquad , \qquad f(n) \qquad b.$$

$$\begin{aligned} T(n) &= aT(n/b) + f(n) \qquad , \qquad b \\ T(n) &= aT(n/b) + f(n) \qquad n \qquad T \qquad . \qquad : \\ 1. \qquad f(n) &= O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \qquad \varepsilon \qquad , \qquad T(n) \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \\ 2. \qquad f(n) &= \Theta(n^{\log_b a}) \qquad , \qquad T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n). \\ 3. \qquad f(n) &= \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \qquad \varepsilon \qquad af(n/b) \leq \\ cf(n) & \qquad c \\ n, \qquad T(n) &= \Theta(f(n)). \end{aligned}$$

$$.$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a}).$$

$$T(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_b a})$$

$$\begin{aligned}
 & T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(f(n)) = \Theta(f(n)) \text{ .} \\
 & f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \\
 & \varepsilon
 \end{aligned}$$

4.4.2. Целые приближения сверху и снизу

$$\begin{aligned}
 & b \qquad n \cdot b \qquad n \\
 & T(n) = aT(n/b) + f(n) \\
 & T(n) = aT(n/b) + f(n) \text{ .} \\
 & n, n/b, n/b^2, \dots \\
 & n_i \\
 & n_i = \begin{cases} n, & i \\ n_{i-1}/b, & i \end{cases} \\
 & \log_b n \\
 & n \\
 & b \\
 & x \leq x \\
 & n_0 \leq n, \\
 & n_1 \leq \frac{n}{b} \text{ ,} \\
 & n_2 \leq \frac{n}{b^2} - \frac{1}{b} \text{ ,} \\
 & n \leq n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T\ n\qquad f\ n_0\qquad aT\ n_1 \\
& \qquad f\ n_0\qquad af\ n_1\qquad a^2T\ n_2 \\
& \leq f\ n_0\qquad af\ n_1\qquad a^2f\ n_2\qquad \ldots \\
& \qquad a^{\lfloor \log_b n \rfloor - 1} f\ n_{\lfloor \log_b n \rfloor - 1}\qquad a^{\lfloor \log_b n \rfloor} T\ n_{\lfloor \log_b n \rfloor} \\
& \Theta\ n^{\log_b a}\qquad \sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n \rfloor - 1} a^j f\ n_j\ .
\end{aligned}$$

 n
 b

$$\begin{aligned}
& T\ n_{\lceil \log_b n \rceil} \\
& f\ n \\
& n\qquad\qquad\qquad n_0
\end{aligned}$$

$$g\ n\qquad \sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n \rfloor - 1} a^j f\ n_j\ .$$

$$n\ b^i\qquad n_i$$

$$b\ b -$$

$$f\ n_j\qquad O\ n^{\log_b a}\ a^j\qquad O\ n\ b^{j-\log_b a}$$

$$b^j\ n\leq$$

$$j\colon$$

$$f\ n\qquad O\ n^{\log_b a}$$

$$\begin{aligned}
 n_j \\
 f(n_j) &\leq c \left(\frac{n}{b^j} - \frac{b}{b-1} \right)^{\log_b a} \\
 &= c \left(\frac{n^{\log_b a}}{a^j} \right) \left(\frac{b^j}{n} \cdot \frac{b}{b-1} \right)^{\log_b a} \\
 &\leq c \left(\frac{n^{\log_b a}}{a^j} \right) \left(\frac{b}{b-1} \right)^{\log_b a} \\
 &= O \left(\frac{n^{\log_b a}}{a^j} \right).
 \end{aligned}$$

$$c \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \log_b a$$

$$f(n_j) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$$

 n

$$n \cdot b^j$$

 n_j

Упражнения

4.4-1

 n_i
 b

4.4-2

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n) \\
 T(n) &= \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)
 \end{aligned}$$

$$b$$

4.4-3

$$af(n) \leq cf(n)$$

$$\varepsilon$$

$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$$

$$\begin{array}{lll}
 T(n) & T(n) & n^2 \\
 T(n) & T(n) & n^2 \\
 T(n) & T(n) & n^2 \\
 T(n) & T(n) & \overline{n} \\
 T(n) & T(n) - & n \\
 T(n) & T(\overline{n}) &
 \end{array}$$

4-2 Недостаточное число

$$A \dots n$$

$$B \dots n$$

$$O(n)$$

$$A$$

$$A$$

$$O(n)$$

4-3 Время передачи параметров

$$\Theta(N) \quad N$$

$$A(p \dots q)$$

М

4-4 Ещё несколько рекуррентных соотношений

$$\begin{array}{lll}
T(n) & T(n) & n \\
T(n) & T(n) & n \lg n \\
T(n) & T(n) - & n \\
T(n) & T(n) - & \lg n \\
T(n) & \overline{n}T - \overline{n} & n
\end{array}$$

4-5 Переход от степеней к произвольным аргументам

$$\begin{array}{lll}
& T(n) & n \\
& b & \\
n & T(n) & h(n) \\
& T(n) \leq h(n) & n \\
b & h(n) & O(h(n) \cdot b) \\
T(n) & O(h(n)) & \\
aT(n) \cdot b & f(n) & n \quad n_0 \quad a \quad b \quad f(n) \\
& T(n) & n \leq n_0 \\
T(n_0) \leq aT(n_0) \cdot b & f(n_0) & T(n) \\
& f(n) &
\end{array}$$

4-6 Числа Фибоначчи

производящую функцию generating function
 формальный ряд formal power series

$$\mathcal{F} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + \dots$$

$$\mathcal{F}(z) = z + z\mathcal{F}(z) + z^2\mathcal{F}(z)$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{z}{1 - \varphi z} - \frac{z}{1 - \varphi^2 z} = \left(\frac{1}{1 - \varphi} - \frac{1}{1 - \varphi^2} \right)$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \dots$$

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i z^i.$$

$$\varphi(F_i) = \varphi^i$$

4-7 Тестирование микросхем

n

A

B

5.1.

Множество	set	элементов	members	elements
x		S		$x \in S$
x		S		$x \in S$
			S	, ,
			$\in S$	$\in S$
		A	B	равны are equal
A	B			

- $\emptyset$ пустое множество empty set
- $\mathbb{Z}$ целых чисел integers $\mathbb{Z}$
 $\dots, -, -, , , , \dots$
- $\mathbb{R}$ вещественных действительных чисел
real numbers
- $\mathbb{N}$ натуральных чисел natural numbers
 $\mathbb{N}$, , , ... 1

B $x \in A$ $x \in B$ A **подмножеством**
subset B A $A \subseteq B$ **собственным подмножеством**
proper subset B A $A \subset B$ $A \subset B$
 $A \subseteq A$ $A \subseteq B$ A
 $A \subseteq B$ $A \subseteq B$ $B \subseteq A$ $A \subseteq C$ $A \subseteq B \subseteq C$
 $\emptyset \subseteq A$ A
 $\mathbb{Z}$ x $x \in \mathbb{Z}$

$A \cap B$ **теоретико-множественных операций**
set operations
• **Пересечение** intersection $A \cap B$
 $A \cap B$ $x \in A \wedge x \in B$
• **Объединение** union $A \cup B$
 $A \cup B$ $x \in A \vee x \in B$
• **Разность** difference $A \setminus B$
 $A \setminus B$ $x \in A \wedge x \notin B$

Свойства пустого множества (empty set laws):

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A.$$

Идемпотентность (idempotency laws):

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A.$$

Коммутативность (commutative laws):

Рис. 5.1
(5.2). A, B, C ,

Ассоциативность (associative laws):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

Дистрибутивность (distributive laws):

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Законы поглощения (absorption laws):

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

Законы де Моргана (DeMorgan's laws):

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B \cap C} &= \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}, \\ \overline{A \cup B \cup C} &= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \end{aligned}$$

$$A \cup B \cup C$$

universe **универсумом**

$\mathbb{Z}$ U
дополнение complement $A \cup \overline{A}$
 $A \subseteq U$

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = U.$$

$A, B \subseteq U$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

$A \cap B = \emptyset$ **непересекающимися** disjoint

S_1, S_2

разбиении

- S_i попарно не пересекаются are pairwise disjoint
- $S_i \cap S_j = \emptyset \quad i \neq j$
- S

$$S = \bigcup_{S_i \in \mathcal{S}} S_i$$

$\mathcal{S}$

$$s \in S$$

S_i

S

cardinality

размером size

S

мощностью cardinality

$\emptyset$

конечного finite
бесконечных infinite

счётными countably infinite
не

счётными uncountable

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$

$A \subseteq B$

$$A \cap B = A \cap (B - A) \cup B$$

$$A \cap B \subseteq A \cup B$$

$$A \cap B$$

$$A \cap B$$

$$A \cap B$$

$$A \subseteq B$$

$$B \cap A \subseteq B$$

n

n элементным n

singleton

синглтоном singleton

subset

k

k

S

S

$$\{a, b\}$$

множеством-степенью power set

$|S|$

$$\emptyset, a, b, a, b$$

S

S

$a \quad c \quad b \quad d$
 $a, b \quad c, d$
 Декартово произведение cartesian product A
 B
 $A \quad B \quad A \times B$

$A \times B \quad a, b \quad a \in A \quad b \in B$
 $a, b \times a, b, c \quad a, a, \quad a, b, \quad a, c, \quad b, a, \quad b, b, \quad b, c$
 $A \quad B$

$A \times B \quad A \cdot B.$

$n \quad A_1, A_2, \dots, A_n$
 n -ок n tuples
 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \quad a_1, a_2, \dots, a_n \quad a_i \in A_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

$a, b, c, d \quad a, b, c, d \quad a, b, c \quad a, b, c$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \quad A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$

декартову степень

$A^n \quad A \times A \times \dots \times A$

$A^n \quad n \quad A^n \quad n \quad n$

Упражнения

5.1-1

5.1-2

$\overline{A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n} \quad \overline{A_1} \quad \overline{A_2} \quad \dots \quad \overline{A_n},$

5.1-3 **форму-
лой включений и исключений** principle of inclusion and exclusion

$$\begin{aligned} & A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n \quad A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n \\ & - A_1 \quad A_2 - A_1 \quad A_3 - \dots \\ & A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \\ & - {}^{n-1} A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n \end{aligned}$$

5.1-4

5.1-5 S S n n

5.1-6 n

5.2.

Бинарным отношением binary relation R

$$\begin{aligned} & A \quad B \\ & A \times B \quad a, b \in R \quad a R b \\ & A \quad b \quad A \times A \end{aligned}$$

отношением n ary relation $a, b \quad a, b \in \mathbb{N} \quad a \quad b \quad n$ -**местным от-**

$$\begin{aligned} & A_1, A_2, \dots, A_n \\ & A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \end{aligned}$$

рефлексивным reflexive $R \subseteq A \times A$

$$a R a$$

$$a \in A \leq$$

$$\mathbb{N}$$

R **симметричным** symmetric

$$a R b \quad b R a$$

$$a, b \in A$$

$$<$$

$$R$$

транзитивным

$a, b, c \in A$

R R R a, b $a, b \in \mathbb{N}$ a $b -$

отношением эквивалентно-

ти equivalence relation R

A **класс эквивалентности** equiv

alence class $a \in A$ a $b \in A$ aRb

a b R a b

a b b a R a c a b b $c - b$

R

$, , , , \dots$

$, , , , \dots$

Теорема 5.1 (Отношения эквивалентности соответствуют разбиениям)

A

A A $-$

A

A

$a \in a$ a

a b aRc bRc cRb $b \subseteq a$ aRx

c aRb b bRx a b

$a \subseteq b$

$\square$

R A **антисимме-**

ричным aRb bRa a b .

$\leq$ $a \leq b$ $b \leq a$ a b

частичного порядка partial order

частично упорядо-

ченным множеством partially ordered set

x y
 y
 x **максимальным**
 imal x y

линейным total order lin
 der a b aRb
 $\leq$

Упражнения

5.2-1 $\mathbb{Z}$ $\subseteq$

5.2-2 n
 $a \equiv b \pmod n$
 $\mathbb{Z}$ $a \equiv b \pmod n$
 $a - b = qn$

5.2-3

5.2-4 S R
 S R

5.2-5

	$A \times B$	Функцией	function
	$f \subseteq A \times B$		
$b \in B$	$a, b \in f$	$a \in A$	область
область определения	domain	A	B
codomain		f	
	A	B	
	B	A	B
		A	
f	a, b	$a \in \mathbb{N}$	$b = a \bmod$
		$f: \mathbb{N} \rightarrow$	,
$a \bmod$	a	f	$b \in$
	f	f	f
	g	a, b	$a, b \in \mathbb{N}$
		$a = b$	
			,
	a, b	b	значением
аргумента	argument	a	$b = f(a)$
$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	$f(n)$	n	$f(n)$
$n \in \mathbb{N}$	$f, g: A \rightarrow B$	$f = g$	равными
$f(a)$	$g(a)$	$a \in A$	
	$B_1 \cup B_2$	$f(a)$	$g(a)$
Конечной последовательностью	finite sequence	$a!$	n
	f		
$, \dots, n -$		$f, f, \dots, f(n -$	Бесконечной
последовательностью	infinite sequence		

$\dots \times A_n \rightarrow B$ $f \ a_1, a_2, \dots, a_n$ $f \ A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$
 $f \ a_1, a_2, \dots, a_n$ a_i **аргументом** argument
 f
 $a_1, a_2, \dots, a_n$
 $a \in A$ $b \in B$ $f \ a$ $f \ A \rightarrow B$ **образом** image a
 A' A $f \ A'$

$f \ A'$ $b \in B$ b $f \ a$ $a \in A'$.

Множество значений range f
 $f \ A$
 $f \ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $f \ n$ n
 $f \ \mathbb{N}$ m m n $n \in \mathbb{N}$
 $f \ A \rightarrow B$ **сюрьекцией** surjection **на** B
ложением $b \in B$ $a \in A$
 $f \ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $f \ n$ n
 $f \ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$f \ A \rightarrow B$ $f \ A \rightarrow B$ A **на** B onto B **инъекцией** injection **вло**
жением
 $f \ a$ $/$ $f \ a'$ a $/$ a' $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$
 $f \ n$ n
 n n
 $f \ n$ n
 f f one to one function
 $f \ A \rightarrow B$ **биекцией** bijection

$$\mathbb{N} \quad \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow - \\ \rightarrow \\ \rightarrow - \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\mathbb{Z} \quad \mathbb{N} \quad \mathbb{Z}$$

взаимно однозначными соответствиями one to one correspondence

$$\begin{array}{l} A \quad B \\ A \quad A \end{array} \quad \text{перестановкой} \quad \text{permutation}$$

$$f^{-1} \quad f \quad \text{обратную} \quad \text{inverse}$$

$$f^{-1} b \quad a \quad f a \quad b.$$

$$f n \quad - \quad n \quad n$$

$$f^{-1} m \quad \left\{ \begin{array}{l} m, \\ - m - , \end{array} \right. \quad m \quad m$$

Упражнения

$$\text{6.3-1} \quad A \quad B \quad f \quad A \rightarrow B$$

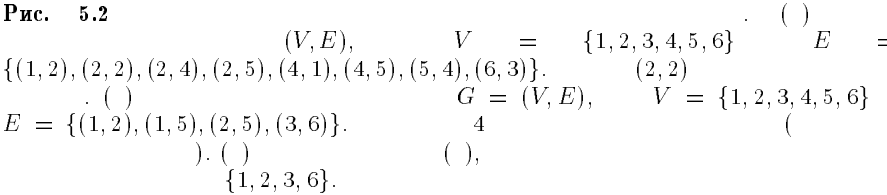
$$\begin{array}{l} f \\ f \end{array} \quad \begin{array}{l} A \leq B \\ A \quad B \end{array}$$

$$\text{6.3-2} \quad f \quad \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

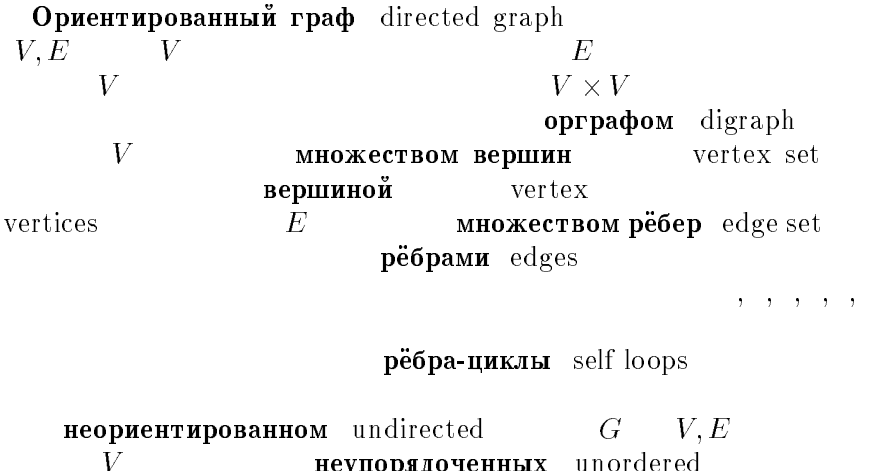
6.3-3

$$\text{6.3-4} \quad f \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Рис. 5.2



5.4.



выходит из incident from leaves u, v **входит** incident to enters v

инцидентно incident on vertices u, v

смежна G u, v u is adjacent to u

$u \rightarrow v$

Степенью degree

исходящую степень out degree

входящую степень in degree

степенью degree

Путь длины k path of length k

u, v $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ i $, \dots, k$ **содержит** con

u, v_k v $v_{i-1}, v_i \in E$ k k $v_0, v_1, \dots, v_k$ $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$

v_0 **началом** v_k **концом**

из v_0 в v_k u u

p u u' u' **достижи**

из u по пути p u' is reachable from u via p

$u \rightsquigarrow u'$

простым simple

$, , ,$

$, , ,$

Подпуть subpath

n $v_0, v_1, \dots, v_k$

Циклом cycle

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

простым

$$v_1, v_2, \ldots, v_k$$

$$k$$

$$k$$

$$k$$

, , ,

, , ,

, , ,

, , , , ,

,

,

простым simple

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

циклом

$$k$$

$$v_0$$

$$v_k$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_k$$

, , ,

ациклическим acyclic

связным connected

связными компонента

ми connected components

, , ,

сильно связным strongly

connected

сильно связные компоненты strongly connected com

ponents

$$u$$

$$v$$

$$v$$

$$u$$

, , ,

,

$$G \quad V, E \quad G' \quad V', E'$$

изоморфными

isomorphic

$$f \colon V \rightarrow V'$$

$$u, v \in E$$

ис. 5.3 () . () :

$$G \rightarrow G' \quad V \rightarrow V' \quad u, v, w, x, y, z \quad f \quad u, v, w, x, y, z \quad f \quad u, v, w, x, y, z \quad f$$

$G' \rightarrow E', V' \subseteq E, V$ **подграфом** subgraph $G \rightarrow E, V$

$$G' \rightarrow E', V'$$

$$E' \rightarrow u, v \in E \quad u, v \in V'$$

ограничением G
 V' subgraph of G induced by V'

ориентированный вариант directed version
 $u, v \rightarrow v, u$

неориентированный вариант undirected version

$$v, u \rightarrow u, v$$

соседом neighbor

u

u, v

u	v	v
u	v	u
complete		Полным
	двудольным	bipartite
	V_1	V_2
	лесом	forest
		деревом
		fre
tree		directed acyclic graph
		dag
	мультиграф	multigraph
		Гипер
граф	hypergraph	
	гиперрёбра	hyperedges

Упражнения

5.4-1

лемму о рукопожатиях

handshaking lemma

5.4-2

k

5.4-3

u

v

u

v

5.4.4

V, E

5.4-5

5.4-6

5.4-7

5.5.

5.5.1. Деревья без выделенного корня

free tree

дерево

лесом forest

Теорема 5.2 (Свойства деревьев). G — V, E

Рис. 5.4 () . () . () ,

Рис. 5.5 $u \rightarrow v$

4. $G \rightarrow E \rightarrow V -$.
5. $G \rightarrow E \rightarrow V -$.
6. $G \rightarrow$,

. $\Rightarrow$

$p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow u$

$w \rightarrow v$

$w \rightarrow p_1 \rightarrow p_2$

$z \rightarrow p \rightarrow p''$

$y \rightarrow w \rightarrow z \rightarrow p' \rightarrow p''$

$p_2 \rightarrow z \rightarrow p_1 \rightarrow p' \rightarrow w$

$V - k \leq V -$ $V -$
 $\Rightarrow$ $E \quad V -$

 $\Rightarrow$ G $E \quad V -$
 G k k
 k
 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ $u \quad v$
 u, v
 u, v
 v

6.5.2. Деревья с корнем. Ориентированные деревья

Дерево с корнем корневое дерево rooted tree

корнем root
nodes

 x $r \quad x$ r
предками ancestors x y
 x x потомком descendant y

 x x собственны
ми предками proper ancestors собственными потомками proper

Рис. 5.6 ()

(7)
1)

4.

2)

((

()

3)

x
 x x
поддеревом с корнем в x subtree rooted at x

y, x x y
родителем parent x x ребёнком y
father son

siblings

братьями
листом leaf external node
внутренними internal

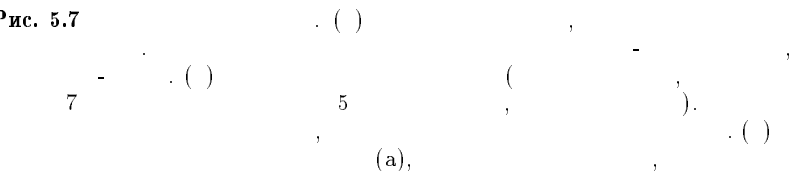
нью degree

степе

x

глубиной depth

высоте



height
 Деревом с порядком на детях ordered tree

5.5.3. Двоичные деревья. Позиционные деревья

Двоичное дерево binary tree

-
-
- корнем root
- левом поддеревом left subtree
- правым поддеревом right subtree
- пустым emp
- у NIL
- левым ребёнком left child
- правым ребёнком right child

Рис. 5.8

3 8 7

ичных k ary
рево positional tree

k

k
позиционное де

i th child is absent k

Полным k -ичным деревом complete k ary tree

k
 k

k

k h

k
 k^2

k

k^h

h

$\log_k n$

k

n

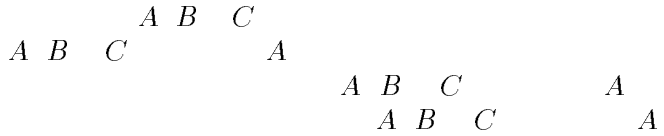
k

h

$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = k^h -$

Упражнения

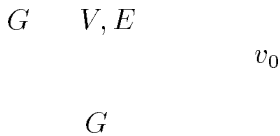
5.5-1



5.5-2



5.5-3



5.5-4

5.5-5



5.5-6

внутреннюю сумму длин internal path length

внешнюю сумму длин



5.5-7

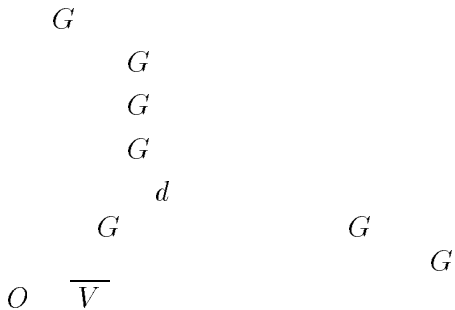


неравенство Крафта Kraft inequality

5.5-8



L , L



5-2 Графы и люди

n

n

5-3 Разбиение деревьев на части



3.1.

 n n

Правила суммы и произведения

Правило суммы rule of sum

 $A \cup B$ $A \cap B$

Размещения без повторений

без повторений

n

k

S

k permutation

n

k

S

k

n

$n - 1$

$\dots$

$n - k$

$\frac{n!}{n - k !}$

n

$n - k$

k

$n - k$

a, b, c, d

$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.$

Сочетания

Сочетаниями

k combinations

n

k

n

k

a, b, c, d

a, b , a, c , a, d , b, c , b, d , c, d .

n

k

$k!$

$k!$

k

n

k

$n!$

Биномиальные коэффициенты

$$n \choose k$$

C_n^k

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}.$$

$$k + n - k$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

C_n^k
binomial coefficients
expansion

биномиальные коэффициенты в
биноме Ньютона binomial ex

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

Оценки биномиальных коэффициентов

$$\leq k \leq n$$

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{\left(\frac{n}{k}\right) \left(\frac{n-1}{k-1}\right) \dots \left(\frac{n-k+1}{1}\right)}{\left(\frac{n}{k}\right)^k}$$

$$k! \leq \frac{k^k}{e^k}$$

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &\leq \frac{n^k}{k!} \\ &\leq \left(\frac{en}{k}\right)^k. \end{aligned}$$

$$k \leq n$$

$$C_n^k \leq \frac{n^n}{k^k n^{n-k}},$$

$$0$$

$$C_n^{\lambda n} \leq \frac{n^n}{\lambda^{n\lambda} (1-\lambda)^{n(1-\lambda)}} = \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right)^\lambda \left(\frac{1}{1-\lambda} \right)^{1-\lambda} \right)^n = e^{nH(\lambda)},$$

$$H(\lambda) = -\lambda \lg \lambda - (1-\lambda) \lg (1-\lambda)$$

(двоичной) шенноновской энтропией
binary entropy function
 H H

Упражнения

6.1-1 k

6.1-2 Булева функция boolean function n

$$\text{TRUE, FALSE}^m$$

$$n$$

$$n$$

$$m$$

6.1-13

$$C_{2n}^n = \frac{2n}{\pi n} O(n)$$

6.1-14

$$\lambda(H) = \lambda(H)$$

3.2.

вероятностным пространством sample space
элементарными событиями elementary events

вер-
эле-

$$S = \{ \omega_1, \omega_2, \dots \}$$

Событием event

S

верным событием certain event
пустым событием null event
несовместными mutually exclusive
 $s \in S$

$$\begin{aligned} & A \cap B = \emptyset \\ & A \cup B \subseteq S \end{aligned}$$

досто-
невоз-
несо-

$$S$$

$$S$$

$$\sigma$$

Аксиомы вероятности

Распределением вероятностей probability distribution
 $\mathbb{P}$

аксиомам вероятности

probability axioms

$P(A) \geq 0$
 $P(S) = 1$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ if $A \cap B = \emptyset$
 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ if $A_1, A_2, \dots$ are disjoint events.
 The probability of the event A is denoted by $P(A)$.

$P(A) \leq P(B)$ if $A \subseteq B$
 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
 $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$

$P(A) = \sum_{s \in A} p_s$

discrete probability distribution

discrete

$P(A) = \sum_{s \in A} p_s$

равномерное распределение вероятностей uniform
 probability distribution S
 k

$$S \qquad k \quad S \\ s \in S$$

бросание симметричной монеты
 flipping a fair coin

$$\begin{matrix} n \\ S \end{matrix}, \quad \begin{matrix} n \\ S \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n \\ n \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} A & k & n-k \\ S & A & C_n^k \\ C_n^k & A & P(A) \\ & C_n^k & n \end{matrix}$$

Непрерывное равномерное распределение вероятностей

$$a,b \qquad c,d \subseteq a,b$$

$$P(c,d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

$$c,d \qquad c,d$$

непрерывным равномерным распределением continuous uniform probability distribution

Условная вероятность и независимость

conditional probability $P(A|B)$ **условной вероятности** A B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

$$P(B) > 0$$

A

независимыми independent

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

$$P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A).$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ **попарно независимыми**
pairwise independent

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ **независимыми в совокупности** mutually independent

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

Формула Байеса

$$A \cup B$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) + P(A \cap \bar{B})}.$$

$$P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

формула Байеса Bayes's theorem

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}.$$

$$B \cup \bar{A}$$

$$\frac{P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})}{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{A})}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}.$$

$$A$$

$$B$$

$$P(A)$$

$$P(B|A)$$

$$P(\bar{A})$$

$$P(B|\bar{A})$$

$$P(B|A)$$

6.2-10

6.2-11
 $X \sim Y \sim Z$

$$Y \sim X \sim Z$$

$$X \sim Y \sim X$$
$$Z$$

3.3.

Дискретная случайная величина discrete random variable X

$$S$$

$$X$$

$$X(x) = \sum_{s \in S: X(s) = x} 1$$

$$P(X=x) = \sum_{\{s \in S: X(s)=x\}} P(s).$$

$$f(x) = P(X=x)$$

функцией распределения вероятностей probability

$$P(X=x) = \sum_x P(X=x)$$

$$P_s \quad X$$

$$P(X) \quad X, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad X \quad Y$$

$$f(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

функцией совместного распределения вероятностей
 joint probability density function $X \quad Y$
 y

$$P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y).$$

x

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y).$$

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}.$$

независимыми independent

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \quad P(X=x, Y=y)$$

Математическое ожидание случайной величины

среднее mean

мате

математическим ожиданием expected value expectation
 X

$$M(X) = \sum_x x P(X=x)$$

$$\mu_X \qquad \qquad \mu$$

$$X$$

$$\mathbb{M}(X) \cap \mathcal{P} \qquad \qquad \mathcal{P} \qquad \qquad - \qquad \mathcal{P} \\ - \\ .$$

$$\mathbb{M}(X \cap Y) = \mathbb{M}(X) \cap \mathbb{M}(Y), \\ \mathbb{M}(X) \cap \mathbb{M}(Y)$$

$$X \qquad \qquad g(x) \qquad \qquad g(X)$$

$$\mathbb{M}(g(X)) = \sum_x g(x) \mathbb{P}(X=x) \\ g(x) = ax + a \\ \mathbb{M}(aX) = a\mathbb{M}(X).$$

$$a \\ \mathbb{M}(aX \cap Y) = a\mathbb{M}(X \cap Y). \\ X \cap Y$$

$$\mathbb{M}(XY) = \sum_x \sum_y xy \mathbb{P}(X=x,Y=y) \\ \sum_x \sum_y xy \mathbb{P}(X=x) \mathbb{P}(Y=y) \\ \sum_x x \mathbb{P}(X=x) \sum_y y \mathbb{P}(Y=y) \\ \mathbb{M}(X) \mathbb{M}(Y)$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$M X_1 X_2 \cdots X_n = M X_1 M X_2 \cdots M X_n .$$

$$X$$

$$, \quad , \quad , \cdots$$

$$M X = \sum_{i=0}^{\infty} i P X = i$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i P X = i - P X = i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P X = i .$$

$$P X = i$$

$$i -$$

$$P X$$

Дисперсия и стандартное отклонение

Дисперсия variance X

$$M X$$

$$D X = M X - M X^2$$

$$M X^2 - X M X = M^2 X$$

$$M X^2 - M X M X = M^2 X$$

$$M X^2 - M^2 X = M^2 X$$

$$M X^2 - M^2 X .$$

$$M M^2 X = M^2 X = M X M X = M^2 X$$

$$M X$$

$$a = M X$$

$$M X^2 = D X = M^2 X$$

$$a$$

$$a^2$$

$$D aX = a^2 D X .$$

$$X = Y$$

$$D X = Y = D X = D Y$$

$$X_1, \dots, X_n$$

$$D \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n D X_i .$$

Стандартным отклонением standard deviation
 X

$$\sigma$$

$$\sigma_X$$

$$\sigma^2$$

Упражнения

6.3-1

6.3-2 $A \dots n$ n

6.3-3

6.3-4 $f(X) \leq g(Y)$ f g

6.3-5 X $M(X)$ **неравенство Маркова**
 Markov's inequality

$$P(X \geq t) \leq M(X)/t$$

t **неравенством**
Чебышёва

6.3-6 S

$$s \in S \qquad \qquad \qquad t$$

$$\mathbf{P}\{X=t\}=\mathbf{P}\{X'=t\}.$$

6.3-7

6.3-8

$$D(X)=M(X^2)-X^2$$

6.3-9

$$D(aX)$$

$$a^2D(X)$$

6.4.

испытаний

по схеме Бернулли Bernouilli trials

n

успех success

p **неудачу** failure

$$-p$$

Геометрическое распределение

$$p \qquad \qquad \qquad q=1-p$$

$$X=1,2,\ldots$$

$$\mathbf{P}\{X=k\}=q^{k-1}p$$

$$k=1,2,\ldots$$

$$k$$

геометрическим

распределением geometric distribution

$$p$$

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=p\cdot\frac{1}{q^2}=p\cdot\frac{1}{1-p}=p(1-p)^{-1}$$

Рис. 6.1

$$q = 1 - p.$$

$$\begin{aligned} p &= 1 \\ 1 - p &= \end{aligned}$$

$$D X = q p^2.$$

$$p$$

Биномиальное распределение

$$\begin{aligned} X &= 0, 1, \dots, n \\ P(X = k) &= C_n^k p^k q^{n-k}, \\ C_n^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

$$\text{рис. 6.2} \quad b(k; 15; 1-3), \quad n = 15$$

$$= 1-3, \quad np = 5.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}[X] &= \sum_{k=0}^n kb\left(k\right)_{n,p} \\
&= \sum_{k=1}^n kC_n^k p^k q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{(n-1)-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} b\left(k\right)_{n-1,p} \\
&= np.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&X_i \\
&\mathbb{M}[X_i] = p \cdot \quad q \cdot \quad p \\
&\qquad \qquad \qquad q
\end{aligned}$$

$$\mathbb{M}[X] = \mathbb{M}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{M}[X_i] = \sum_{i=1}^n$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}[X_i] &= \frac{\mathbb{M}[X_i^2]}{\mathbb{M}[X_i]^2} - \frac{\mathbb{M}^2[X_i]}{\mathbb{M}[X_i]^2} \\
&= \frac{p}{p} - \frac{p}{p} \\
&= \mathbb{D}[X_i] = p - p^2 = pq.
\end{aligned}$$

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}[X_i] = \sum_{i=1}^n pq = npq.$$

$$\frac{b \ k \ n, p}{b \ k - \ n, p} = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} \cdot \frac{n! \ k - \ ! \ n - k \ ! p}{k! \ n - k \ ! n! q} \cdot \frac{n - k \ p}{k q} \cdot \frac{n \ p - k}{k q}.$$

$$\frac{b \ k \ n, p}{b \ k - \ n, p} = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} \cdot \frac{n! \ k - \ ! \ n - k \ ! p}{k! \ n - k \ ! n! q} \cdot \frac{n - k \ p}{k q} \cdot \frac{n \ p - k}{k q}.$$

Лемма 6.1. $n \geq k, p \geq q, q - p, \leq k \leq n.$

$$b \ k \ n, p \leq \left(\frac{np}{k} \right)^k \left(\frac{nq}{n-k} \right)^{n-k}.$$

$$\begin{aligned} b \ k \ n, p &= C_n^k p^k q^{n-k} \\ &\leq \left(\frac{n}{k} \right)^k \left(\frac{n}{n-k} \right)^{n-k} p^k q^{n-k} \\ &= \left(\frac{np}{k} \right)^k \left(\frac{nq}{n-k} \right)^{n-k}. \end{aligned}$$

□

Упражнения

3.4-1

3.4-2

3.4-3

$$b \ k \ n, p = b \ n - k \ n, q \cdot q - p$$

3.4-4

6.4-5

$$n \qquad \qquad \qquad e \qquad \qquad \qquad n \qquad \qquad \qquad e$$

6.4-6

$$n \qquad \qquad \qquad n \qquad \qquad \qquad C_{2n}^m \qquad \qquad \qquad n$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 2^{-k} = C_{2n}^n.$$

6.4-7

$$\leq k \leq n$$

$$b \leq k \leq n, \qquad \qquad \qquad \leq \qquad \qquad \qquad nH(k/n)-n,$$

$$H(x)$$

6.4-8

$$i \qquad \qquad \qquad n \qquad \qquad \qquad \frac{p_i}{X}$$

$$i \qquad \qquad \qquad , \qquad \qquad \qquad , \dots , n \qquad \qquad \qquad p \qquad \qquad \qquad p_i$$

$$\mathbf{P} \left\{ X \leq k \right\} \leq \sum_{i=0}^{k-1} b \left(i/n, p \right)$$

$$k \qquad \qquad \qquad , \qquad \qquad \qquad , \dots , n$$

6.4-9

$$n \qquad \qquad \qquad X \qquad \qquad \qquad p_1, \dots, p_n \qquad \qquad \qquad X'$$

$$p'_1, \dots, p'_n \qquad \qquad \qquad p'_i \qquad \qquad \qquad p_i \qquad \qquad \qquad i$$

$$\mathbf{P} \left\{ X' \leq k \right\} = \mathbf{P} \left\{ X \leq k \right\}.$$

$$k \qquad \qquad \qquad , \dots , n$$

k
 хвосты tails

$$np$$

$$p \leq k \leq n, p$$

Теорема 6.2. X n
 p .

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=k}^n b(i, n, p) \leq C_n^k p^k.$$

.

$$C_n^{k+i} \leq C_n^k C_{n-k}^i.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq k) &= \sum_{i=k}^n b(i, n, p) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} b(k+i, n, p) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} C_n^{k+i} p^{k+i} = p^{n-(k+i)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-k} C_n^k C_{n-k}^i p^{k+i} = p^{n-(k+i)} \\ &= C_n^k p^k \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i p^i = p^{(n-k)-i} \\ &= C_n^k p^k \sum_{i=0}^{n-k} b(i, n-k, p) \\ &= C_n^k p^k, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n-k} b(i, n-k, p) \leq 1 \quad \square$$

Следствие 6.3. X n
 p

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=k}^n b(i, n, p) \leq C_n^{n-k} = p^{n-k} \leq C_n^k = p^{n-k}$$

Теорема 6.4. X n
 p q
 $-p$.

$$\mathbf{P} \, X \quad k \quad \sum_{i=0}^{k-1} b \, i \, n, p \quad \frac{kq}{np-k} b \, k \, n, p$$

$$k \quad np. \qquad \sum_{i=0}^{k-1} b \, i \, n, p \qquad i \qquad , \qquad , \dots, k$$

$$\frac{b \, i - \quad n, p}{b \, i \, n, p} \quad \frac{i q}{n-i} \, p \quad \left(\frac{i}{n-i}\right) \left(\frac{q}{p}\right) \leqslant \left(\frac{k}{n-k}\right) \left(\frac{q}{p}\right).$$

$$x \quad \left(\frac{k}{n-k}\right) \left(\frac{q}{p}\right) \quad ,$$

$$b \, i \, n, p \qquad \leqslant i \leqslant k$$

$$x \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \quad x \quad - x \qquad b \, k \, n, p$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} b \, i \, n, p \quad \frac{x}{-x} b \, k \, n, p \quad \frac{kq}{np-k} b \, k \, n, p \, .$$

Следствие 6.5.

X
 n
 p
 q

$-p$

$$\mathbb{P}\left(X\leq k\right)=\sum_{i=k+1}^nb_{i\mid n,p}=\frac{n-k-p}{k-np}b_{k\mid n,p} \\ np\leq k\leq n$$

Теорема 6.6.

n
 $;$

$$q_i\leq -p_i). \\ \mu\leq \mathbb{M}X. \\ \mathbb{P}\left(X-\mu\leq r\right)\leq \left(\frac{\mu e}{r}\right)^r. \\ x\leq \alpha e^{\alpha x}$$

$$\mathbb{P}\left(X-\mu\leq r\right)=\mathbb{P}\left(e^{\alpha(X-\mu)}\leq e^{\alpha r}\right),$$

$$\alpha \\ \mathbb{P}\left(X-\mu\leq r\right)\leq \mathbb{M}\left(e^{\alpha(X-\mu)}\right)e^{-\alpha r}.$$

$$\mathbb{M}\left(e^{\alpha(X-\mu)}\right)=\mathbb{M}\left(e^{\alpha X}\right)e^{-\alpha\mu}=\prod_{i=1}^ne^{\alpha(X_i-p_i)}$$

$$X=\sum_{i=1}^nX_i$$

$$X-\mu=\sum_{i=1}^nX_i-p_i.$$

$$e^{\alpha(X_i-p_i)}$$

$$\mathbb{M}\left(e^{\alpha(X-\mu)}\right)=\mathbb{M}\left[\prod_{i=1}^ne^{\alpha(X_i-p_i)}\right]=\prod_{i=1}^n\mathbb{M}\left(e^{\alpha(X_i-p_i)}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} e^{\alpha(X_i - p_i)} &= e^{\alpha(1-p_i)} p_i + e^{\alpha(0-p_i)} q_i \\ &= p_i e^{\alpha q_i} + q_i e^{-\alpha p_i} \\ &\leq p_i e^{\alpha} \\ &\leq \exp p_i e^{\alpha} \text{ ,} \end{aligned}$$

$$\exp x - \alpha \sum_{i=1}^n q_i \leq e^{\alpha q_i} \leq e^{\alpha} e^{-\alpha p_i} \leq e^x$$

$$\mathbb{M} e^{\alpha(X-\mu)} \leq \prod_{i=1}^n \exp p_i e^{\alpha} = \exp \mu e^{\alpha} \text{ ,}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^n p_i$$

$$\mathbb{P} \{X - \mu \leq -r\} \leq \exp \mu e^{\alpha} - \alpha r \text{ .}$$

$$\alpha = \ln r - \mu$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{X - \mu \leq -r\} &\leq \exp \mu e^{\ln(r - \mu) - r \ln r - \mu} \\ &= \frac{e^r}{r - \mu} e^{-r} = \left(\frac{\mu e}{r}\right)^r \text{ .} \end{aligned}$$

□

$$\frac{r}{\mu} \leq \frac{r}{\mu} e^{\frac{r}{\mu} - r} = e^{\frac{r}{\mu} - r}$$

$$\mu = \mathbb{M} X \leq np$$

Следствие 6.7. $\mathbb{P} \{X \geq np + r\} \leq \left(\frac{npe}{np+r}\right)^r$

$$\mathbb{P} \{X - np \geq r\} = \mathbb{P} \{X \geq np + r\} \leq \sum_{k=[np+r]}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq \left(\frac{npe}{np+r}\right)^r \text{ .}$$

Упражнения

6.5-2

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i a^i = a^n \frac{k}{na-k} b^k n, a = a$$

$$a = k = n$$

6.5-3

$$k = np \quad p = q = -p$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} p^i q^{n-i} = \frac{kq}{np-k} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}.$$

6.5-4

$$P(\mu - X \leq r) \leq \left(\frac{n - \mu e}{r}\right)^r,$$

$$P(np - X \leq r) \leq \left(\frac{nqe}{r}\right)^r.$$

6.5-5

$$-p_i = \mu \sum_{i=1}^n p_i X_i = r$$

$$P(X - \mu \leq r) \leq e^{-r^2/2n}.$$

6.5-6

$$\alpha = \ln r / \mu$$

6.6.

k

6.6.1. Парадокс дня рождения

Парадокс дня рождения birthday paradox

$$\left(\begin{array}{c} - \\ - \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} - \\ - \end{array}\right) \cdots \left(\begin{array}{c} k- \\ - \end{array}\right).$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & n & & & \\ & & & i & & & \\ & & i & & & & \\ A_2 & \cdots & A_{i-1} & & & & i \end{array}$$

$$B_k \quad A_{k-1} \quad B_{k-1}$$

$$\mathbb{P} \left[B_k \right] = \mathbb{P} \left[B_{k-1} \right] \mathbb{P} \left[A_{k-1} \mid B_{k-1} \right] \dots$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{P} \left[B_1 \right] \\ \mathbb{P} \left[A_{k-1} \mid B_{k-1} \right] \qquad n-k \\ n-k- \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left[B_k \right] = \mathbb{P} \left[B_1 \right] \mathbb{P} \left[A_1 \mid B_1 \right] \mathbb{P} \left[A_2 \mid B_2 \right] \cdots \mathbb{P} \left[A_{k-1} \mid B_{k-1} \right] \\ &\cdot \left(\frac{n-}{n} \right) \left(\frac{n-}{n} \right) \cdots \left(\frac{n-k}{n} \right) \\ &\cdot \left(-\frac{ }{n} \right) \left(-\frac{ }{n} \right) t \cdots \left(-\frac{k-}{n} \right) \end{aligned}$$

$$x\leqslant e^x$$

$$\mathbb{P} \left[B_k \right] \leq e^{-1} e^{-2} e^{-(k-1)} e^{-\left(1+2+3+\dots+(k-1)\right)}$$

$$n \qquad k \qquad k \qquad \overline{\ln n}$$

Другой метод анализа

$$X_{ij}^{i,j}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$n$$

$$M X_{ij} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

$$i \neq j$$

$$X_{ij} \leq i \leq j \leq k$$

$$C_k^2 = \frac{k(k-1)}{n}$$

$$n \cdot k \cdot \frac{1}{n^2} \approx \frac{k}{n}$$

$$X = \sum_{i,j} X_{ij}$$

$$M X$$

$$X$$

$$P(X)$$

$$\Theta \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$b \leq k \leq n, \quad b \leq n$$

$$?$$

$$b$$

$$?$$

$$b \leq n$$

$$i \leq i$$

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 \\ n_1 & n_2 \dots n_b \end{matrix}$$

$$i$$

$$b-i \leq b$$

$$b \leq b \leq b-i \dots$$

6.6.3. Участки повторяющихся исходных

$$\Theta \lg n$$

$$O \lg n \quad A_{ik}$$

$$P(A_{ij})$$

$$r \lg n$$

$$r$$

$$\begin{array}{cc} -r \lg n & n^{-r} \\ n \cdot n^{-r} & n^{-(r-1)} \end{array}$$

$$n$$

$$\lg n$$

$$n$$

$$n^2 \quad -6$$

$$\lg n$$

$$\Omega \lg n$$

$$\lg n$$

$$[(\lg n)^2]$$

$$\overline{n}$$

$$-\frac{\overline{n}}{n}$$

$$\lg n$$

$$n \lg n -$$

$$-\frac{\overline{n}}{n} 2n \lg n - 1 \leq e^{-(2n \lg n - 1)} \sqrt{n}$$

$$O(e^{-\lg n}) \quad O(n)$$

$$x \leq e^x$$

$$n \lg n - \overline{n} \lg n - O$$

$$-O(n)$$

$$\lg n$$

$$\Omega \lg n$$

$$- \frac{\Omega \lg n}{n \Omega \lg n}$$

$$\Omega \lg n$$

Упражнения

3.6-1

$$b$$

3.6-2

3.6-3

3.6-4

6.6-5 n n

6.6-6 n
 $\lg n - \lg \lg n$ $- n$

6-1 Шары и урны n
 b
 b^n

$b - n - !$ $b - !$
 n $b -$

$$C_{b+n-1}^n$$

$$C_b^n$$

$$C_{n-1}^{b-1}$$

6-2 Программа вычисления максимума

$A \dots n$
 $max \leftarrow -\infty$
for $i \leftarrow$ **to** n
 do $\triangleright A[i] \leftarrow max$
 if $A[i] > max$
 then $max \leftarrow A[i]$

A

x

i

$A\ i$

i

i

s_i

i

$M\ s_i$

s

s_1

s_2

$\cdots$

s_n

$M\ s \quad \Theta\ \lg n$

3-3 Проблема выбора

n

k

k

e

k

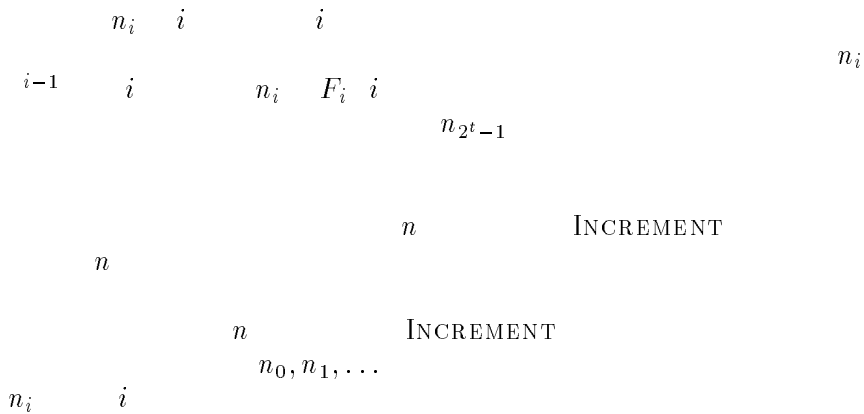
$n\ e$

3-4 Вероятностный счётчик

t

$t -$

вероятностного подсчёта probabilistic counting



задачу сортировки sorting problem

$$\begin{array}{c} a_1, a_2, \dots, a_n \\ a'_1, a'_2, \dots, a'_n \\ a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq \end{array}$$

a'_n

Структура сортируемых объектов

записи records

ключом key

АЛГОРИТМЫ СОДТИДОВКИ

Порядковые статистики

 i
 $\Omega \ n \lg n$
 i
 $O \ n^2$
 $O \ n$
 $O \ n$

Используемые сведения из математики

Сортировка с помощью кучи

сортировки с помощью кучи

heapsort

$O(n \lg n)$

n

O

$O(n)$

Lisp

Рис. 7.1 $(\)$ $(\)$.

PARENT i
return i

LEFT i
return i

RIGHT i
return i

A

LEFT

PARENT
 LEFT PARENT RIGHT

ОСНОВНЫМ СВОЙ
ством кучи heap property
 $\leq i \leq \text{heap-size } A$

A PARENT i A i .

Высотой height

- HEAPIFY $O \lg n$
- BUILD-HEAP $O n$
- HEAPSORT $O n \lg n$
- EXTRACT-MAX INSERT $O \lg n$

Упражнения

- 7.1-1 h
- 7.1-2 n $\lg n$
- 7.1-3
- 7.1-4
- 7.1-5
- 7.1-6 , , , , , , , ,

рис. 7.2

$$\text{HEAPIFY}(A, 2)$$

$$i = 2$$

$$A[2] = 4, A[4] = 10$$

$$A[2] \leftrightarrow A[4]$$

$$\text{HEAPIFY}(A, 4)$$

$$A[4] \leftrightarrow A[9]$$

$$\text{HEAPIFY}(A, 9)$$

$$\text{heap-size } A = 10$$

$$()$$

$$()$$

$$4.$$

$$()$$

HEAPIFY A, i
$$l \leftarrow \text{LEFT } i$$
$$r \leftarrow \text{RIGHT } i$$

if $l \leq \text{heap-size } A$ $A[l] \leftarrow A[i]$

then $largest \leftarrow l$

else $largest \leftarrow i$

if $r \leq \text{heap-size } A$ $A[r] \leftarrow A[\text{largest}]$

then $largest \leftarrow r$

if *largest* / *i*

then $A \vdash i \vdash A$ largest

$$T_n \leq T_{n-1} + \Theta(T_{n/2}) = O(\lg n)$$

HEAPIFY	n	$\Omega \lg n$
---------	-----	----------------

7.4.

BUILD-HEAP

 A $c A n$

LEFT

RIGHT

HEAPIFY

HEAPSORT A BUILD-HEAP A **for** $i \leftarrow \text{length } A$ **downto****do** $A[i] \leftrightarrow A[\text{heap-size } A]$ $\text{heap-size } A \leftarrow \text{heap-size } A - 1$ HEAPIFY A ,**for**

HEAPSORT

 $O(n \lg n)$ $O(n)$ $n - 1$ **for** $O(\lg n)$ **Упражнения****7.4-1**

HEAPSORT

 A

, , , , , , , ,

7.4-2 A **7.4-3**

HEAPSORT

 $\Omega(n \lg n)$

Рис. 7.4

HEAPSORT.
HEAPIFY.

Очередь с приоритетами priority queue

S

key, α

key

ключ

MAXIMUM S

EXTRACT-MAX S

EXTRACT-MAX

INSERT

event driven simulation

EXTRACT-MIN

INSERT

MAXIMUM

Θ

HEAP-EXTRACT-MAX A

if *heap-size* A

then

$max \leftarrow A$

$A[1] \leftarrow A[\text{heap-size } A]$

$\text{heap-size } A \leftarrow \text{heap-size } A - 1$

HEAPIFY A ,

return max

$O(\lg n)$

HEAPIFY

HEAP-INSERT A, key

$\text{heap-size } A \leftarrow \text{heap-size } A + 1$

$A[\text{heap-size } A] \leftarrow key$

while $i > 1$ **and** $A[i] < A[\text{PARENT } i]$

do $A[i] \leftarrow A[\text{PARENT } i]$

Рис. 7.5

15

while

Упражнения

7.5-1

HEAP-INSERT

7.5-2

EXTRACT-MAX

7.5-3

first out

7.5-4

7.5.5

7.5-6

$O(n \lg k)$ k n

7-1 Построение кучи с помощью вставок

HEAP-INSERT

BUILD-HEAP' A

$heap-size\ A \leftarrow$

for $i \leftarrow$ **to** $length\ A$

do HEAP-INSERT $A, A[i]$

BUILD-HEAP BUILD-HEAP'

BUILD-HEAP'

$\Theta(n \lg n)$ n

7-2 Работа с d -ичными кучами

d -ичную кучу d ary heap

d

PAR

ENT LEFT RIGHT

d n

d

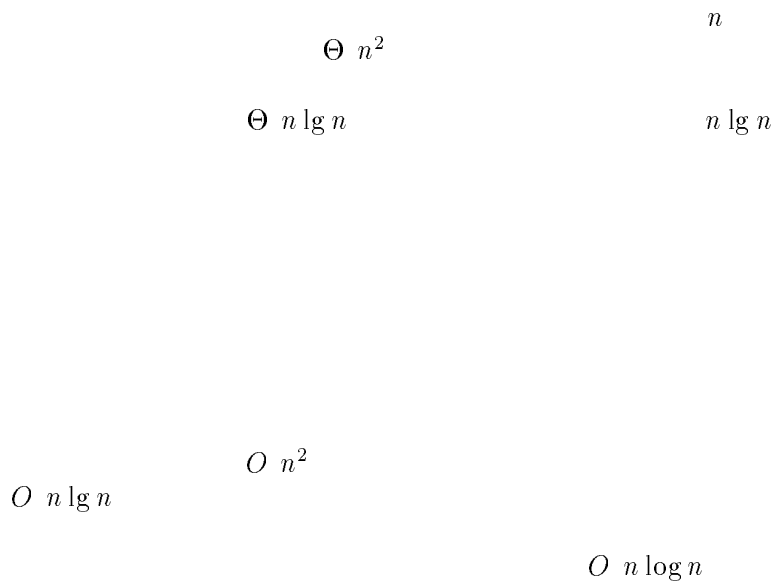
EXTRACT-MAX

n d

INSERT

HEAP-INCREASE-KEY

Быстрая сортировка



$A[p \dots r]$

QUICKSORT

QUICKSORT A, p, r

```

if  $p = r$ 
    then  $q \leftarrow \text{PARTITION } A, p, r$ 
        QUICKSORT  $A, p, q$ 
        QUICKSORT  $A, q + 1, r$ 

```

QUICKSORT $A, \text{length } A$

Разбиение массива

PARTITION

 $A[p \dots r]$

PARTITION A, p, r

```

 $x \leftarrow A[p]$ 
 $i \leftarrow p - 1$ 
 $j \leftarrow r$ 
while TRUE
    do repeat  $j \leftarrow j - 1$ 
        until  $A[j] \leq x$ 
    repeat  $i \leftarrow i + 1$ 
        until  $A[i] > x$ 
    if  $i < j$ 
        then  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
    else return  $j$ 

```

PARTITION

 x
 $A[p]$
 $A[p \dots q]$
 x
 $A[q \dots r]$
 x
 x
 $A[p \dots i]$
 x
 $A[j \dots r]$
 $i = p - 1, j = r$

while

Рис. 8.1

PARTITION.

$x = A[p] = 5$
while ($A[4] \neq 8$) **do** ($A[i] = A[j]$,
 $i = i + 1$, $j = j - 1$)
while ($A[j] = x$) **do** ($A[j] = A[i]$,
 $i = i + 1$, $j = j - 1$)
 $A[j] = x$, $x = 5$, $j = j - 1$

$A[p]$ $A[r]$
 $A[r]$ i j r
 q r
 PARTITION

PARTITION

$r - p$

Упражнения

8.1-1

PARTITION

A , i , j , r

8.1-2

PARTITION

$A[p \dots r]$

8.1-3

8.2.

$$O\left(n \lg n\right)$$

$$O\left(n^2\right)$$

Наихудшее разбиение

$$n -$$

$$\Theta\left(n\right)$$

$$T\left(n\right)$$

$$T\left(n\right) - T\left(n - \right) = \Theta\left(n\right)$$

$$T\left(n\right) = \Theta\left(n^2\right)$$

$$T\left(n\right) - T\left(n - \right) = \Theta\left(n\right) \sum_{k=1}^n \Theta\left(k\right) = \Theta\left(\sum_{k=1}^n k\right) = \Theta\left(n^2\right)$$

$$\Theta\left(n^2\right)$$

$$\Theta\left(n\right)$$

Наилучшее разбиение

Рис. 8.2

PARTITION

).

Рис. 8.3

Промежуточный случай

Рис. 8.4

9 : 1.

$\Theta(n \lg n)$.

$$\log_{10} 9 n \quad \Theta \lg n$$

$$\Theta n \lg n$$

$\Theta n \lg n$

Среднее время: интуитивные соображения

Рис. 8.5 () : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ ()

Упражнения

8.2-1

QUICKSORT $\Theta(n \lg n)$

8.2-2

QUICKSORT $\Theta(n^2)$

8.2-3

8.2-4

$\alpha = -\alpha$

$\alpha \leq$

$-\lg n - \lg \alpha$

$-\lg n - \lg -\alpha$

8.2-5

α

$\alpha <$

$$\alpha \quad - \alpha \quad - \alpha$$

3.3.

$$O \ n$$

вероятностным randomized
генератор случайных чисел random number generator
RANDOM a, b
 $a \quad b$ RANDOM ,

$$b - a$$

генератор псевдослучайных чисел pseudorandom number generator

TITION

$A[p]$

RANDOMIZE

$i \leftarrow \text{RAN}$

return P

PARTITION

RANDOMIZE

if $p = r$

then c

Упражнения

8.3-1

8.3-2

QUICKSORT

F

8.3-3

8.3-4

$\Theta(n)$

$A[1..n]$

8.4.

QUICKSORT

RANDOMIZED-QUICKSORT

RANDOMIZED-QUICKSORT

8.4.1. Анализ наихудшего случая

$\Theta(n^2)$

$O(n^2)$

$T(n)$

n

$$T(n) = \max_{1 \leq q \leq n-1} (T(q) + T(n-q)) = \Theta(n^2)$$

$$T(q) \leq cq^2 \quad \text{for } q \leq n/2$$

$$T(n) \leq \max_{1 \leq q \leq n-1} (cq^2 + c(n-q)^2) = \Theta(n^2)$$

8.4.2. Анализ среднего времени работы

$$\Theta(\lg n)$$

$$\Theta(n \lg n)$$

RANDOMIZED-

QUICKSORT
PARTITION

Анализ разбиений

RANDOMIZED-PARTITION

PARTITION

$$\begin{aligned} &A[p..r] \\ &A[p..r] \end{aligned}$$

q

PARTITION

$$\begin{aligned} &x \quad A[p..r] \\ &\text{рангом} \quad \text{rank} \quad x \end{aligned}$$

rank x

$$n - r - p$$

$$A[p..r]$$

$$\begin{aligned} &\text{rank } x \quad n \\ &\text{rank } x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{rank } x - \\ &x \quad \text{rank } x \end{aligned}$$

$$i \quad j \quad p$$

n

$$, \dots, n -$$

Рекуррентное соотношение для среднего времени работы

$$T_n = \frac{1}{n} \left(T_1 + T_{n-1} + \sum_{q=1}^{n-1} T_q + T_{n-q} \right) = \Theta(n)$$

$$T_n = \Theta(n^2) \quad q$$

$$\frac{1}{n} T_1 + T_{n-1} = \frac{1}{n} \Theta(n^2) = O(n).$$

$$\Theta(n) \quad T_1 + T_{n-1}$$

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n-1} T_q + T_{n-q} = \Theta(n).$$

$$T_k = k, \dots, n-$$

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} T_k = \Theta(n).$$

Решение рекуррентного соотношения

$$T(n) \leq an \lg n + b \quad a \quad b$$

$$n \quad a \quad b \quad n$$

$$T(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} T(k) = \Theta(n)$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (ak \lg k + b) = \Theta(n)$$

$$\frac{a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \lg k + \frac{b}{n} (n-1) = \Theta(n).$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \lg k \leq \frac{1}{2} n^2 \lg n$$

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq \frac{a}{n} \left(-n^2 \lg n - -n^2 \right) - \frac{b}{n} n - \Theta(n) \\
&\leq a n \lg n - \frac{a}{n} n - b - \Theta(n) \\
&= a n \lg n - b - \left(\Theta(n) - b - \frac{a}{n} n \right) \leq a n \lg n - b, \\
a &= \frac{a}{4} n - \Theta(n) - b \\
&= O(n \lg n)
\end{aligned}$$

Доказательство оценки для суммы

$$\begin{aligned}
&n \lg n \\
&\sum_{k=1}^{n-1} k \lg k \leq n^2 \lg n.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} n^2 \lg n - \Omega(n^2) \leq \sum_{k=1}^{n-1} k \lg k - \lg n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \lg k \leq \lg n \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \lg n \leq -n^2 \lg n.$$

$$\begin{aligned}
&k \leq n \\
&\lg k \leq \lg n \\
&n^2 \leq n^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \lg k \leq \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \lg k + \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k \lg k$$

$$k \leq n \implies \lg k \leq \lg n \implies \lg n -$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \lg k \leq \lg n \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + \lg n \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k$$

$$\lg n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \leq -n(n-1) \lg n - \left(\frac{n}{2} - \right) n$$

$$\leq \frac{2-1}{2} n^2$$

$$N$$

$$j, \dots, N \quad p_{i,j}$$

$$p_{i,i}$$

$$i$$

$$i, i, \dots, i \quad i \quad i \quad k$$

$$k$$

Упражнения

8.4-1

$$\Omega(n \lg n)$$

8.4-2

$$q^2 \leq n - q^2, \quad n - q^2 \geq q^2$$

8.4-3

RANDOMIZED-QUICKSORT

$$\Omega(n \lg n)$$

8.4-4

RANDOMIZED-QUICKSORT A, p, r

$$r - p \leq k$$

$$O(nk) \leq n \lg n - k$$

$$k$$

8.4-5

$$\int x \ln x \, dx = -x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \lg k$$

8.4-6

RANDOMIZED-PARTITION

$$\alpha \leq \alpha$$



3-2 Алгоритм Ломута для разбиения

PARTITION
N Lomuto

$A[p..i] \quad A[i+1..j]$
 $x \quad A[r] \quad x$

LOMUTO-PARTITION A, p, r

```

 $x \leftarrow A[r]$ 
 $i \leftarrow p - 1$ 
for  $j \leftarrow p$  to  $r$ 
    do if  $A[j] \leq x$ 
        then  $i \leftarrow i + 1$ 
         $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
if  $i = r$ 
    then return  $i$ 
    else return  $i - 1$ 

```

LOMUTO-PARTITION

PARTITION LOMUTO-PARTITION

PARTITION LOMUTO-PARTITION
 $\Theta(n) \quad n$

QUICKSORT PARTITION

LOMUTO-PARTITION

RANDOMIZED-LOMUTO-PARTITION

$A[r]$

LOMUTO-PARTITION
RANDOMIZED-LOMUTO-PARTITION

PARTITION q
RANDOMIZED-PARTITION

$p \quad r - q$

3-3 Сортировка по частям

STOOGESORT A, i, j

 if $A[i] > A[j]$

 then swap $A[i] \leftrightarrow A[j]$

 if $i < j$

 then return

$k \leftarrow \lfloor j - i \rfloor / 3$ ▷

 STOOGESORT $A, i, j - k$ ▷

 STOOGESORT $A, i + k, j$ ▷

 STOOGESORT $A, i, j - k$ ▷

STOOGESORT

STOOGESORT

STOOGESORT

8-4 Размер стека при быстрой сортировке

QUICKSORT

tail recursion

QUICKSORT' A, p, r

 while $p < r$

 do ▷

$q \leftarrow \text{PARTITION } A, p, r$

 QUICKSORT' A, p, q

$p \leftarrow q$

QUICKSORT'

O

размер стека stack depth

$$\Theta \lg n \qquad \text{QUICKSORT}' \qquad \Theta \, n \lg n$$

8-5 Разбиение с помощью медианы трёх элементов RANDOMIZED-QUICKSORT

median of three method метод медианы трёх

$$A \dots n \qquad n \qquad A' \dots n$$

$$p_i \qquad \text{P } x \qquad A' \, i \qquad x$$

$$p_1 \quad p_n \qquad p_i \qquad i \qquad , \quad , \dots , n - \qquad i \quad n$$

$$\qquad \qquad \qquad A' \quad n$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$x \quad A' \, i \qquad n \quad \leqslant i \leqslant n \qquad x$$

$$\Omega \, n \lg n$$

$$n \lg n$$

Сортировка за линейное время

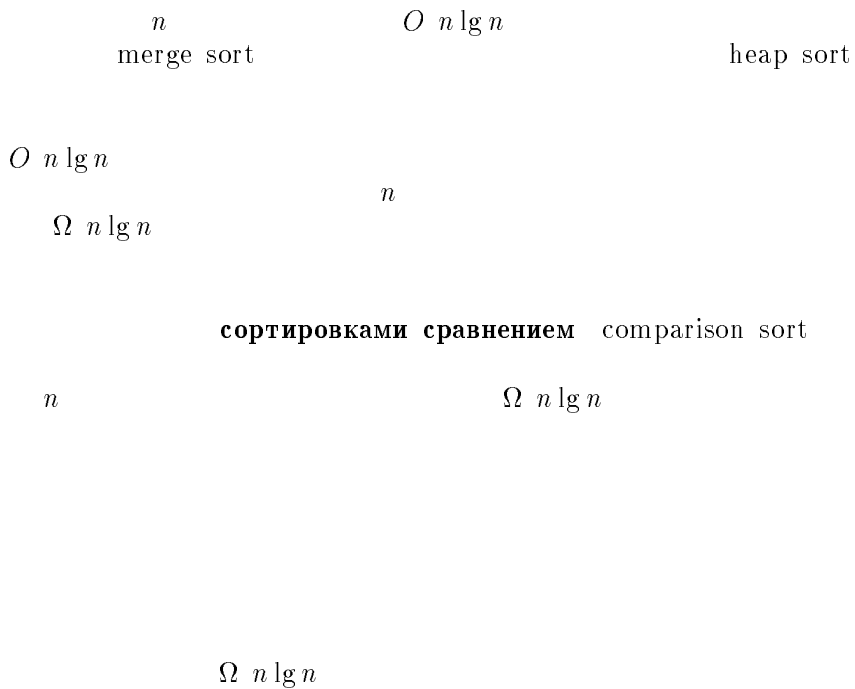


Рис. 9.1

$$3! = 6,$$

$$6$$

Разрешающие деревья

разрешающее дерево

decision tree

$$n$$

$$a_1, \dots, a_n$$

$$\leq i, j \leq n \quad \begin{matrix} a_i & a_j \\ \pi & , \pi & , \dots, \pi & n & \pi \end{matrix}$$

$$n$$

$$a_i \leq a_j$$

$$a_i \leq a_j$$

$$\pi$$

$$a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)}$$

$$n!$$

Нижняя оценка для худшего случая

Теорема 9.1.

$$n \text{ , } \Omega \ n \lg n \text{ .}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \\ & n! \\ & h \quad n! \leq h \\ & n! = n \cdot e^{-n} \end{aligned}$$

$$h = n \lg n - n \lg e = \Omega \ n \lg n \text{ ,}$$

Следствие 9.2.

$$O \ n \lg n$$

Упражнения

9.1-1

$$\begin{aligned} & \lg n! \\ & \sum_{k=1}^n \lg k \end{aligned}$$

9.1-3

$$\begin{aligned} & n! \\ & n \end{aligned}$$

9.1-4

$$\begin{aligned} & a_i = a_j \\ & a_i = a_j \\ & n \\ & \Omega \ n \lg n \end{aligned}$$

9.1-5

$$n -$$

9.1-6

$$\Omega \ n \lg k$$

$$n \ k$$

$$k$$

9.2.

сортировки подсчётом counting sort

n

$$k \qquad k \quad O \ n$$

$$O \ n$$

x

x

x

x

x

$$C \ \dots k \qquad k$$

$$A \ \dots n$$

$$B \ \dots n$$

COUNTING-SORT A, B, k

```

for  $i \leftarrow$  to  $k$ 
    do  $C[i] \leftarrow$ 
for  $j \leftarrow$  to  $\text{length } A$ 
    do  $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$ 
 $\triangleright C[i]$   $i$ 
for  $i \leftarrow$  to  $k$ 
    do  $C[i] \leftarrow C[i] - C[i - 1]$ 
 $\triangleright C[i]$   $i$ 
for  $j \leftarrow \text{length } A$  downto
    do  $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$ 

```

Рис. 9.2

Co U

$$C \quad C \quad C$$

$$C \quad ,$$

$$. () \quad B$$
$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & & & n & \\ & A & j & & A \\ & & & & \\ B & & C & A & j \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} & & O_n \\ O_k & & k \\ & n & \end{array}$$

Упражнения

9.2-1

COUNTING-SORT k A , , , , , , , , ,

9.2-2

COUNTING-SORT

9.2-3

COUNTING-SORT

for $j \leftarrow$ **to** $length\ A$

9.2-4

COUNTING-SORT

B

$A \leftarrow C$

A

9.2-5

n

k

O

$O\ n \cdot k$ $a \cdot b$

d n A
 d
 RADIX-SORT A, d
for $i \leftarrow$ **to** d
do A i

d $k -$ n
 d Θn k
 Θdn kd d k $O n$

16

16

COUNTING-SORT

 E $\lg n \approx$

9.3-2

9.3-3

9.3-4

$$n^2 \qquad O \ n$$

9.3-5

d

9.4.

сортировки вычёрпыванием bucket sort

n

черпак bucket *n*

рис. 9.4 $\text{BUCKET-SORT.}(\)$ $A[1..10]$
 $B[0..9]$ 5. i
 $B[0], \dots, B[9]$

BUCKET-SORT A

$n \leftarrow \text{length } A$
for $i \leftarrow$ **to** n
do $A[i] \rightarrow B[nA[i]]$
for $i \leftarrow$ **to** $n - 1$
do $B[i], B[i+1], \dots, B[n-1]$

$$A[i] = A[j]$$

$$O(n)$$

$$B[i] = n_i \quad n_i$$

$$i = O(Mn^2)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} O(M n_i^2) = O\left(\sum_{i=0}^{n-1} M n_i^2\right).$$

 n_i
 $i \quad n$
 n
 n
 p
 n
 n_i

$$M n_i \quad k \quad C_n^k p^k - p^{n-k}$$

$$D n_i \quad np - p$$

$$- n$$

$$M n_i^2 \quad D n_i \quad M^2 n_i - \frac{\quad}{n} \quad \Theta \quad .$$

 $O \ n$

Упражнения

9.4-1

BUCKET-SORT

 A
 $\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot$
 $\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot$

9.4-2

$$O \ n \lg n$$

9.4-3

 n
 $x_i \ y_i$
 $\Theta \ n$

9.4-4

 X

функция распределения

$$\mathbf{P} \; X \leqslant x$$

$$n$$

$$\begin{array}{ccc} & P & P \\ O & & \end{array}$$

$$n$$

9-1 Нижние оценки для среднего числа сравнений

$$\begin{array}{ccc} & \Omega \; n \lg n & n \\ & A & \end{array}$$

$$T_A$$

$$\begin{array}{ccc} T_A & & n! \end{array}$$

$$n!$$

$$D \; T$$

$$T$$

$$T \qquad k$$

$$\begin{array}{ccccc} LT & RT & & & \\ D \; T & D \; LT & D \; RT & k & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} d \; m & D \; T & \\ T \; m & d \; k & \min_{1 \leq i \leq m-1} d \; i \end{array}$$

A T

T

$\Omega \ n \lg n$

T

T

9-2 Сортировка без дополнительной памяти за линейное время

O

b

$O \ bn$

n

k

$O \ n \ k$

$O \ k$

k

R C Singleton

Медианы и порядковые статистики

 n i i порядковой

статистикой order statistic

минимум minimum

максимум maximum

 n Медианой median n i n n i n i n n i n i n

Задача выбора

элемента с данным номером selection problem

Дано:

 A n i $\leq i \leq n$

Найти:

 $x \in A$ $i -$

$$O(n)$$

10.1.

n

$$n -$$

$$A \quad n$$

MINIMUM A

$min \leftarrow A$

for $i \leftarrow$ **to** $length\ A$

do if $min > A[i]$

then $min \leftarrow A[i]$

return min

n

$$n -$$

MINIMUM

$$\Theta(\lg n)$$

Одновременный поиск минимума и максимума

Упражнения

10.1-1

$$n \lg n - n$$

10.1-2

$$n - n$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

RANDOMIZED-SELECT A, p, r, i

if $p = r$

then return $A[p]$

$q \leftarrow \text{RANDOMIZED-PARTITION}(A, p, r)$

$i \leftarrow q - p$

if $i \leq k$

then return $\text{RANDOMIZED-SELECT}(A, p, q, i)$

else return $\text{RANDOMIZED-SELECT}(A, q, r, i - k)$

RANDOMIZED-PARTITION

$A[p \dots r]$

$A[p \dots q] \quad A[q \dots r]$

$A[p \dots q]$

$\dots r$

$\dots q$

i

$A[p \dots r]$

$i \leq k$

$A[p \dots q]$

RANDOMIZED-

SELECT

i

k

k

$p \dots q$

k

$A[q \dots r]$

RANDOMIZED-SELECT

RANDOMIZED-PARTITION

$\Theta(n^2)$

n

$T(n)$

RANDOMIZED-PARTITION

n

i

n

i

$n -$

n

$T(n)$

$T(n)$

$$\begin{aligned}
T_n &\leq \frac{1}{n} \left(T_{\max}, n - \sum_{k=1}^{n-1} T_{\max} \right) \\
&\leq \frac{1}{n} \left(T_n - \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} T_k \right) \\
&\quad - \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} T_k = O(n)
\end{aligned}$$

$$T_n - n$$

$$T_n - n$$

$$T_n \leq cn$$

$$T_j \leq cj$$

$$j = n$$

$$\begin{aligned}
T_n &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} ck = O(n) \\
&\leq \frac{c}{n} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{cn}{4} = O(n) \leq cn,
\end{aligned}$$

$$c$$

$$O(n)$$

Упражнения

10.2-1

RAND

10.2-2

SELECT

, , , , , , , , ,

10.2-3

RANDOMIZED S

$$A[p..q] \quad A[p..q] \quad A[q..r] \quad A[q..r]$$

10.3.

SELECT
 $O(n)$

RANDOMIZED-SELECT

SELECT
 PARTITION

SELECT i
 n

n n

 n

SELECT x
 n

PARTITION k

 $n - k$

SELECT i
 $i \leq k$ $i - k$
 $i - k$

SELECT x

n x x
 x

$(\lceil n \rceil) = n$

SELECT RANDOMIZED-SELECT

$$\Omega \ n \lg n$$

Упражнения

10.3-1 SELECT

10.3-2 x SELECT n x

n x n

10.3-3 $O \ n \lg n$

10.3-4 i

10.3-5

10.3-6 k -квантилями k th quantiles n

k —

$$O \ n \lg k$$

10.3-7 k

Рис. 10.2

?

10.3-8

$X \dots n \quad Y \dots n$

$O \lg n$

10.3-9

n

10-1 Сортировка i наибольших элементов

n

i

$n \quad i$

а.

i

б.

i

3.

 i i **0-2 Взвешенная медиана** n $x_1, \dots, x_n$ x w_i **Взвешенной медианой** weighted median x_k

$$\sum_{x_i \leq x_k} w_i \leq -$$

$$\sum_{x_i \leq x_k} w_i \leq -.$$

4.

 n

5.

 n $O \ n \lg n$

3.

SELECT

 $\Theta \ n$ **Задача о выборе места для почты** post office location problem n $p_1, \dots, p_n$ n $w_1, \dots, w_n$ p p_i

$$\sum_{i=1}^n w_i d(p, p_i)$$

 $d(a, b)$ $a \leq b$

9.

 $d(a, b) = |a - b|$

2.

 a x_1, y_1 b x_2, y_2 L_1 $d(a, b)$ $x_1 -$ $x_2 - y_1 - y_2$

Manhattan

distance

0-3 Нахождение i -го по величине элемента при малых i

a.

$$U_i \leq \begin{cases} T \leq n & n \leq i \\ n & U_i \leq n \\ T \leq i & n \end{cases}$$

b.

$$U_i \leq n \quad n \leq O(T \leq i \log n \leq i)$$

c.

$$i \leq U_i \leq n \leq O(\lg n)$$

d.

$$O(T \leq n \leq k \lg k) \quad k \leq U_i \leq n \leq n$$

dynamic

динамических

словарём dictionary

Элементы множеств

ключ key

дополнительная информация satellite data

Операции над множествами

запросы queries

операций, меняющие множества

SUCCESSOR PREDECESSOR
 SUCCESSOR

MINIMUM S

$O \lg n$

n

Обзор части III

11.1.

DELETE

стека stack

last in first out

LIFO

очереди queue

first in first out

FIFO

Стеки

Рис. 11.1

$()$ $()$ S 4 $\text{PUSH}(S, 17)$ $\text{POP}(S)$ 3 17 .

 S
 $S \text{ top } S$
 $\text{top } S$

пуст is empty

 $\text{top } S$

переполнение

underflow

STACK-EMPTY S

if $\text{top } S$

then return TRUE

else return FALSE

PUSH S, x

$\text{top } S \leftarrow \text{top } S$

$S \text{ top } S \leftarrow x$

POP S

if STACK-EMPTY S

then error "underflow"

else $\text{top } S \leftarrow \text{top } S -$

return $S \text{ top } S$

Очереди

ENQUEUE

DEQUEUE

DEQUEUE

голова	head	хвост	tail
---------------	------	--------------	------

$$\begin{array}{ccc} & n - & Q \dots n \\ head\ Q & & tail\ Q \end{array}$$
$$tail\ Q = \begin{matrix} & head\ Q & head\ Q & \dots \\ & & & n \end{matrix}$$
$$\begin{array}{cc} \text{head } Q & \text{tail } Q \\ \text{head } Q & \text{tail } Q \end{array}$$

underflow *head Q* *tail Q*

overflow

ENQUEUE DEQUEUE

ENQUEUE Q, x
$$Q \text{ tail } Q \quad \leftarrow x$$

if $tail\ Q$ $length\ Q$

then $\text{tail } Q \leftarrow$

else $tail\ Q \leftarrow tail\ Q$

DEQUEUE Q
$$x \leftarrow Q \text{ head } Q$$

if *head* Q *length* Q

then $head\ Q \leftarrow$

else $head\ Q \leftarrow head\ Q$

return x

Рис. 11.2

$Q[7 \dots 11] = ()$
 $QUEUE(Q, 3) \quad EN$
 $QUEUE(Q) ($
 6.

Упражнения

11.1-1

$PUSH(S, \quad PUSH$

11.1-2

11.1-3

$ENQUEUE(Q,$
 $ENQUEUE(Q,$

Q

11.1-4

11.1-5

O

11.1-6

ENQUEUE DEQUEUE

11.1-7

11.2.

связанном списке

linked list

не связанного списка doubly linked list

двусторон-

key *next* *prev*
previous

next x *x* *prev x*

prev x NIL *x*
голова head *next x* NIL *x*

хвост tail

head L *head L* NIL *L*

односторонне связанном singly linked

prev **упорядоченном** sorted

включенного unsorted

кольцевом списке circular list **неупо-**

Рис. 11.3 ()

```

      next
(
); head L
LIST-INSE
25;
LIST-DELETE(L
4.

```

Поиск в списке

LIST-SEARCH L ,

LI

LIST-SEARCH L, k

$x \leftarrow \text{head } L$

while $x \neq \text{NIL}$ and $\text{key } x \neq$

do $x \leftarrow \text{next } x$

return x

n

Добавление элемента в список

LIST-INSERT L, x

$next\ x \leftarrow head\ L$

if $head\ L \neq \text{NIL}$

then $prev\ head\ L \leftarrow x$

$head\ L \leftarrow x$

$prev\ x \leftarrow \text{NIL}$

LIST-INSERT

O

Удаление элемента из списка

LIST-DELETE

x

L

x

x

LIST-SEARCH

LIST-DELETE L, x

if $prev\ x \neq \text{NIL}$

then $next\ prev\ x \leftarrow next\ x$

else $head\ L \leftarrow next\ x$

if $next\ x \neq \text{NIL}$

then $prev\ next\ x \leftarrow prev\ x$

LIST-DELETE

O

$\Theta\ n$

Фиктивные элементы

LIST-DELETE

LIST-DELETE' L, x

$next\ prev\ x \leftarrow next\ x$

$prev\ next\ x \leftarrow prev\ x$

$nil\ L$

$next\ prev\ L$

sentinel

Рис. 11.4 L , $head L$, $next nil L$ ($nil L$)
 () . 11.3 ($head L$, $next nil L$) . ()
 LIST-INSERT'(L, x), $key x = 25$. ()
 1. 4.

$next nil L$ $nil L$
 L
 $nil L$ LIST-SEARCH NIL
 $head L$ $next nil L$

LIST-SEARCH' L, k
 $x \leftarrow next nil L$
while $x \neq nil L$ and $key x \neq k$
do $x \leftarrow next x$
return x

LIST-DELETE

LIST-INSERT' L, x
 $next x \leftarrow next nil L$
 $prev next nil L \leftarrow x$
 $next nil L \leftarrow x$
 $prev x \leftarrow nil L$

Упражнения

1.2-1

O

1.2-2

PUSH

POP

O

1.2-3

ENQUEUE

DEQUEUE

O

1.2-4

SEARCH

INSERT

DELETE

1.2-5

UNION

O

1.2-6

∞

1.2-7

$\Theta(n)$

O

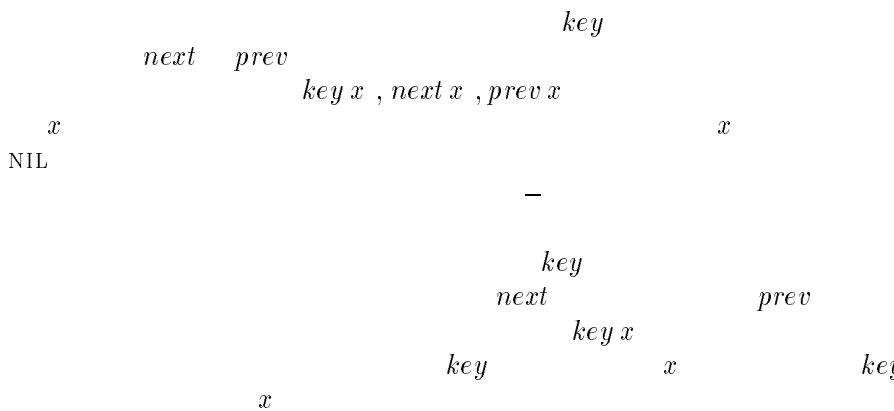
1.2-8

Рис. 11.5 . 11.3 ,
 (key , $next$, $prev$).

L

11.3.

Представление с помощью нескольких массивов



Представление с помощью одного массива

ис. 11.6

A , $key, next, prev$ $0, 1, 2$.
 $key, next, prev$

A
 $A^j \dots k$

j
 $\dots k - j$

$key, next, prev$
 $prev, i, i$ A
 A, i

Выделение и освобождение памяти

сборщик мусора garbage collector

Рис. 11.7

, 11.5 (ALLOCATE-OBJECT $\text{FREE-OBJECT.}()$)
 , 11.5 ($\text{ALLOCATE-OBJECT}()$ ($\text{LIST-INSERT}(L, 4)$)
 $\text{key } 4 \leftarrow 25$ $\text{LIST-DELETE}(L, 5)$, $\text{FREE-OBJECT}(5)$.
 , 8.

 m
 $n \leq m$
 $n - m$
сво
бодны free

списком свободных позиций free list

Рис. 11.8 $L_1 (\text{ } - \text{ }) \quad L_2 (\text{ } - \text{ }),$
 () .

ALLOCATE-OBJECT

```

if free = NIL
  then error
else  $x \leftarrow free$ 
       $free \leftarrow next\ x$ 
  return  $x$ 

```

FREE-OBJECT x

```

 $next\ x \leftarrow free$ 
 $free \leftarrow x$ 

```

n
 ALLOCATE

OBJECT

O

$next$

Упражнения

1.3-1

, , , , ,

1.3-2 ALLOCATE-OBJECT

FREE-OBJECT

1.3-3 ALLOCATE-OBJECT

FREE-OBJECT

$prev$

1.3-4

FREE-OBJECT

ALLOCATE-OBJECT

$\dots m$ m

11.3-5

L m
 key $prev$ $next$ n

COMPACTIFY-LIST

L m m

Θ m

O

11.4.

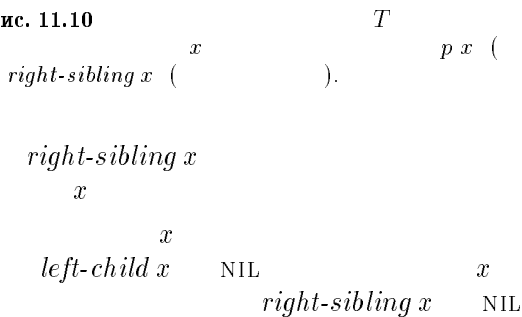
Рис. 11.9 T . x
 $p\ x$ (), $left\ x$ () $right\ x$ ().

Корневые деревья с произвольным ветвлением

k
 $child_1, child_2, \dots, child_k$ $left$ $right$

k k

Рис. 11.10



Другие способы представления деревьев

Упражнения

<i>key</i>	<i>left</i>	<i>right</i>
		NIL
		NIL
	NIL	NIL
	NIL	NIL
	NIL	NIL
	NIL	NIL

11.4-2

11.4-3

11.4-4

11.4-5

O

11.4-6



SEARCH L, k				
INSERT L, x				
DELETE L, x				
SUCCESSOR L, x				
PREDECESSOR L, x				
MINIMUM L				
MAXIMUM L				

11-2 Реализация сливаемых куч на базе списков

сливаемые кучи mergeable

heaps

MAKE-HEAP

INSERT MINIMUM EXTRACT-MIN

UNION

a.

б.

в.

11-3 Поиск в отсортированном сжатом списке

n

n

$key\ i \quad key\ next\ i \quad next\ i \ / \ NIL$

$O\ n$

COMPACT-LIST-SEARCH L, k

$i \leftarrow head\ L$

$n \leftarrow length\ L$

while $i \neq NIL$ and $key\ i \leq k$

do $j \leftarrow RANDOM(1, n)$

if $key\ i < key\ j$ and $key\ j \leq k$

then $i \leftarrow j$

$i \leftarrow next\ i$

if $key\ i \leq k$

then return i

return NIL

$$j \qquad \textit{key } i \qquad \textit{key } j \qquad k$$

$$i \quad j$$

$$\boldsymbol{a}.$$

$$X_t \qquad \qquad \qquad t$$

$$i \qquad \qquad \qquad k \qquad \qquad t$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}. \qquad \qquad \qquad t$$

$$\qquad \qquad \qquad \text{COMPACT-LIST-SEARCH} \qquad \qquad O \ t$$

$$E \ X_t$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}}. \qquad \qquad \qquad E \ X_t \leqslant \sum_{r=1}^n \quad - \ r \ n^{\ t}$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{Z}}. \qquad \qquad \qquad \sum_{r=0}^{n-1} \kappa \ e \leqslant n^{t+1} \quad t$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{d}}. \qquad \qquad \qquad E \ X_t \leqslant n \quad t$$

$$\boldsymbol{e}. \qquad \qquad \qquad \text{COMPACT-LIST-SEARCH} \qquad \qquad O \quad \overline{n}$$

G M Hopper

A

IPL II

A Newell J C Shaw H A Simon

IPL III

$\Theta \ n$

O

O

O

12.1.

$U \quad , \dots, m - \quad m$

$T \dots m -$
таблицей с прямой адресацией direct address table

satellite data actual keys universe of keys key

Рис. 12.1

$U = \{0, 1, \dots, 9\}$
 $2, 3, 5, 8$ ()
 NIL.

позиция ячейка slot position
 U
 k k $T[k]$

DIRECT-ADDRESS-SEARCH T, k
return $T[k]$

DIRECT-ADDRESS-INSERT T, x
 $T[key\ x] \leftarrow x$

DIRECT-ADDRESS-DELETE T, x
 $T[key\ x] \leftarrow \text{NIL}$

O

T

Упражнения

12.1-2 Битовый вектор bit vector

m

m

O

12.1-3

O

DELETE

12.1-4

O

O

O

actual keys universe of keys

Рис. 12.2

- k_2 k_5

k

$h(k)$ хеш-таблице hash table T $\dots m -$

$h: U \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$

хеш-функцией hash function

$h(k)$ хеш-значением hash value k

m

U

actual keys universe of keys

Рис. 12.3

$h(k_5) = h(k_2) = h(k_7)$.
 j .
 T_j , $h(k_1) = h(k_4)$

Разрешение коллизий с помощью цепочек

сцепления элементов chaining

Анализ хеширования с цепочками

T m
Коэффициентом заполнения load factor
 $\alpha = \frac{n}{m}$

$$\Theta \left(\frac{n}{m} \right)$$

m
«равномерного хеширования» simple uniform hashing

$$h(k)$$

$$T[h(k)]$$

$$k$$

Теорема 12.1. T - ,
 α .

$$\Theta \left(\frac{1}{\alpha} \right)$$

$$\frac{n}{m} = \alpha$$

$$\begin{array}{c}
\text{Теорема 12.2.} \\
\alpha \\
\alpha \\
\alpha \\
\Theta \quad \alpha \\
n \\
n \\
\Theta \quad i \quad i - m \\
n \\
\Theta \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{i -}{m} \right) \right) = \Theta \left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n i - \right) \\
\Theta \left(\frac{1}{nm} \cdot \frac{n - n}{\alpha} \right) = \Theta \left(\frac{1}{nm} \cdot \frac{n - n}{\alpha} \right)
\end{array}$$

n
 $\Theta \ n$

12.3. -

Какой должна быть хорошая хеш-функция?

 m
 P
 U
 U
 P
 $\sum$
 P, U
 i

P

Ключи как натуральные числа

`t` `pt` `.` `,` ASCII

12.3.1. Деление с остатком

деления с остатком

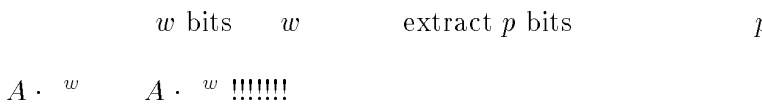


рис. 12.4



$$m \approx$$

$$h(k) \equiv k \pmod{w}$$

2.3.2. Умножение

A

$$A \approx \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m A_k, \quad \dots$$

k m

A

$$\begin{aligned} h(k) &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \pmod{m} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \pmod{m} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \pmod{m} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \pmod{m} \end{aligned}$$

12.3.3. Универсальное хеширование

h

n

$\Theta(n)$

универсальным хеширова

нием universal hashing

$\mathcal{H}$

U

$, \dots, m -$

универсальным universal

$\mathcal{H} \subseteq m$

m

Теорема 12.3.

$m, \quad m \mid n,$

$x,$

x

$y \mid m$

$n -$

x

$n - \quad m$

$n \leq m$

m

r

m

$a \mid a_0, a_1, \dots, a_r$

$, \quad , \dots, m -$

ϑ_a

$h_a \mid x \sum_{i=0}^r a_i x_i \bmod m,$

x

$x_0, x_1, \dots, x_r$

$\mathcal{H} \subseteq h_a \mid,$

a

$\mathcal{H} \subseteq m^{r+1}$

Теорема 12.4.

$\mathcal{H},$

$$x_0 \not\equiv y_0 \pmod{a} \qquad a = a_0, a_1, \dots, a_r \qquad h_a(x) \neq h_a(y)$$

$$a_0(x_0 - y_0) \equiv -\sum_{j=1}^r a_j(x_j - y_j) \pmod{m}.$$

$$x_0 - y_0 \not\equiv 0 \pmod{m} \\ a_1, \dots, a_r \qquad a_0$$

$$\mathcal{H} \qquad m^r \qquad x \neq y \qquad m^r \qquad \mathcal{H} \qquad m$$

$$h \mapsto h(x-y) \qquad m$$

□

Упражнения

12.3-1

$$k \qquad h \mid k$$

12.3-2

$$m$$

12.3-3

$$p \qquad p$$

$$m \qquad p \mid -$$

12.3-4

$$h \mid k \qquad m \mid kA \pmod{m} \qquad m \qquad A \qquad - \mid -$$

12.3-5

$$\mathcal{H}$$

Последовательность испробованных
последовательность проб

HASH-INSERT T, k

$i \leftarrow$

repeat $j \leftarrow h(k, i)$

if $T[j] = \text{NIL}$

then $T[j] \leftarrow k$

return j

else $i \leftarrow i + 1$

until $i = m$

error

k

k

NIL

!

HASH-SEARCH

k

T

j

NIL

HASH-SEARCH T, k

$i \leftarrow$

repeat $j \leftarrow h(k, i)$

if $T[j] = k$

then return j

$i \leftarrow i + 1$

until $T[j] = \text{NIL}$ or $i = m$

return NIL

NIL

DELETED

DELETED

$$\leq m! \qquad m$$

$$\begin{aligned} h\ k, \quad , h\ k, \quad , \ldots, h\ k, m - \\ , \quad , \ldots, m - \qquad \qquad \qquad k \\ m^2 \qquad \qquad \qquad m! \end{aligned}$$

Линейная последовательность проб

$$h' \ U \rightarrow \quad , \quad , \ldots, m -$$

линейную последовательность проб lin

ear probing

$$h\ k, i \qquad h' \ k \qquad i \bmod m.$$

$$k \qquad \qquad \qquad T\ h' \ k$$

$$, \ldots \qquad T\ m - \qquad \qquad T \qquad \qquad T\ h' \ k \qquad , T\ h' \ k$$

$$m$$

кластеров.

Квадратичная последовательность проб

квадратичную последовательность проб quadratic probing

$$h(k,i) = h'(k) + c_1 i + c_2 i^2 \bmod m,$$
$$h' = c_1 + c_2 / T(h'k)$$

$$m = c_1 + c_2$$

$$m$$

образования

вторичных кластеров secondary clustering

Двойное хеширование

Двойное хеширование double hashing

$$h$$

$$h(k,i) = h_1(k) + ih_2(k) \bmod m,$$

$$h_1 \quad h_2$$

$$\frac{k}{m}$$

$$h_1(k)$$

$$h_2(k)$$

$$h_2(k)$$

$$m$$

$$h_2(k)$$

$$m$$

$$d$$

$$h_2(k)$$

$$d$$

$$m$$

$$h_2$$

$$m$$

$$h_2$$

$$m$$

$$m$$

$$h_1(k) = k \bmod m,$$

рис. 12.5

$m = 13, h_1(k) = k \bmod 13, h_2(k) = 1 + (k \bmod 11)$
 $k = 14, \quad \quad \quad : 1 \quad 5 \quad \quad , 9$

$$m' \quad m \quad m' \quad m - \quad m -$$

$$h_2 \cdot k \quad m \quad m' \quad k \quad h_1 \cdot k$$

$$m \quad \Theta \cdot m^2 \quad h_1 \quad h_2$$

$$h_1 \cdot k, h_2 \cdot k$$

Теорема 12.5.

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \alpha \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} i p_i < \infty \right).$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i p_i.$$

$$p_i \quad i$$

$$-\alpha \quad \square$$

$$O \quad - ,$$

Следствие 12.6.

$$\alpha \quad -\alpha$$

Теорема 12.7.

$$\alpha$$

$$\frac{1}{\alpha} \ln \frac{m}{m - \alpha},$$

$$k$$

$$k$$

$$n$$

$$i$$

$$i$$

$$i \cdot m \cdot m$$

$$- i \cdot m \cdot m \cdot m - i$$

$$\frac{m}{m} = \frac{m}{m-1} + \frac{m}{m-2} + \dots + \frac{m}{m-n}.$$

$$m \cdot \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \dots + \frac{1}{m-n} = m$$

$$m \cdot \int_{m-n}^m \frac{1}{t} dt = m \ln \frac{m}{m-n}.$$

$$n$$

$$m - n \ln \frac{m}{m-n} = \alpha \ln \frac{m}{m-\alpha} - \alpha$$

□

Упражнения

$$m$$

$$h' \cdot k \equiv k \pmod{m}$$

$$c_2 \qquad h_1 \qquad h' \qquad c_1 \qquad h_2$$

$$k \pmod{m} -$$

$$\mathbf{12.4-2} \qquad \text{HASH-DELETE}$$

$$\text{DELETED}$$

$$\text{HASH-INSERT} \qquad \text{HASH-SEARCH}$$

$$\mathbf{12.4-3} \qquad h \cdot k,$$

$$h_1 \cdot k \qquad i h_2 \cdot k \pmod{m}$$

$$k \qquad , \dots, m$$

$$h_2 \cdot k \qquad m$$

$$\mathbf{12.4-4}$$

$$\mathbf{12.4-5} \qquad n$$

$$m$$

$$p \leq n, m$$

$$p \leq n, m \leq e^{-n(n-1)/2m}$$

$$n$$

$$\overline{n}$$

$$\mathbf{12.4-6}$$

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{\varepsilon}{n},$$

$$\gamma, \dots \qquad \text{постоянная Эйлера}$$

$$\text{ler's constant} \qquad \varepsilon$$

$$\mathbf{12.4-7}$$

12-1 Наибольшее число проб при добавлении элемента

$$\begin{array}{rcccl} & & n & & m \\ & & & & n \leq m \\ & i & & , \dots, n & \\ i & & & & k \\ -k & & & & \\ & i & & , \dots, n & \\ & i & & & \lg n \\ & n^2 & & & \\ X & & & & \\ & & & , \dots, n & \\ \mathbf{P} \ X & \lg n \leq & n & & \\ & & & & X \\ & O \lg n & & & \end{array}$$

12-2 Поиск в неизменяющемся множестве

12-3 Длины цепочек при хешировании

$$M$$

$$\frac{n}{M} = O(\lg n \lg \lg n)$$

$$Q_k$$

$$Q_k = C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}.$$

$$\frac{P_k}{k} \leq n Q_k$$

$$\frac{Q_k}{c} = e^k$$

$$\frac{n^3}{k} = c \lg n \lg \lg n$$

$$\mathbb{P}\left\{M \leq \frac{c \lg n}{\lg \lg n}\right\} \cdot n = \mathbb{P}\left\{M \leq \frac{c \lg n}{\lg \lg n}\right\} \cdot \frac{c \lg n}{\lg \lg n}$$

$$O(\lg n \lg \lg n)$$

12-4 Пример квадратичной последовательности проб

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad k \\ & \quad \quad \quad , \quad , \dots, m - \\ & \quad \quad \quad h \\ & \quad \quad \quad , \quad , \dots, m - \\ & \quad \quad \quad i \leftarrow h + k \quad \quad \quad j \leftarrow \\ & \quad \quad \quad i \end{aligned}$$

$$j \leftarrow j \bmod m \quad i \leftarrow i + j \bmod m$$

$$c_1 = c_2$$

$$m$$

12-5 k -универсальное хеширование

$$\mathcal{H} \quad U \quad , \quad , \dots, m -$$

$$k\text{-универсальным}$$

$$\mathcal{H}$$

$$\mathcal{H}$$

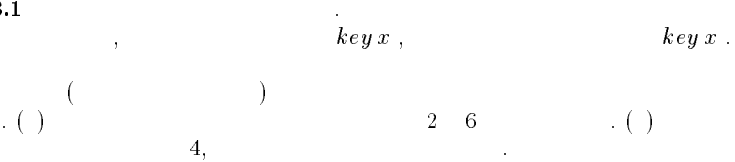
$$h_{a,b} \equiv h_a + b \pmod{m},$$

$$b$$

$$m$$

13 ДВОИЧНЫЕ ДЕРЕВЬЯ ПОИСКА

Рис. 13.1



13.1. Как реализовать операции поиска в двоичном дереве поиска?

двоичном дереве поиска binary search tree

$left\ right\ p\ key$

NIL

свой

ства упорядоченности binary search tree property

$$\begin{aligned} & x \\ & key\ y \leq key\ x \quad y \quad x \\ & key\ y \geq key\ x \quad y \quad x \end{aligned}$$

preorder
postorder
INORDER-TREE-WALK

INORDER-TREE-WALK x
 if $x \neq \text{NIL}$
 then INORDER-TREE-WALK $x.\text{left}$
 INORDER-TREE-WALK x
 INORDER-TREE-WALK $x.\text{right}$

, , , , ,

n

Упражнения

13.1-1

13.1-2

$O(n)$

13.1-3

13.1-4

pre
 $O(n)$

13.1-5

Рис. 13.2

$15 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 13$.

;

15).

15.

13,

2,

20

17 (

13

13.2.

SEARCH MINIMUM MAXIMUM SUC-
CESSOR PREDECESSOR $O(h)$ h

Поиск

k

x

k

NIL

TREE-SEARCH x, k

if $x = \text{NIL}$ $k = \text{key } x$

then return x

if $k < \text{key } x$

then return TREE-SEARCH $\text{left } x, k$

else return TREE-SEARCH $\text{right } x, k$

$O(h)$

```

ITERATIVE-TREE-SEARCH  $x, k$ 
  while  $x \neq \text{NIL}$   $\wedge k \neq \text{key } x$ 
    do if  $k < \text{key } x$ 
      then  $x \leftarrow \text{left } x$ 
      else  $x \leftarrow \text{right } x$ 
  return  $x$ 

```

Минимум и максимум

left

x

```

TREE-MINIMUM  $x$ 
  while  $\text{left } x \neq \text{NIL}$ 
    do  $x \leftarrow \text{left } x$ 
  return  $x$ 

```

TREE-MINIMUM x

$\text{key } x$

x

TREE-MAXIMUM

```

TREE-MAXIMUM  $x$ 
  while  $\text{right } x \neq \text{NIL}$ 
    do  $x \leftarrow \text{right } x$ 
  return  $x$ 

```

$O(h)$

Следующий и предыдущий элемент

NIL x

TREE-SUCCESSOR x

if $\text{right } x \neq \text{NIL}$
 then return TREE-MINIMUM $\text{right } x$
 $y \leftarrow p \ x$
while $y \neq \text{NIL}$ and $x \neq \text{right } y$
 do $x \leftarrow y$
 $y \leftarrow p \ y$
return y

TREE-SUCCESSOR

x

x

TREE-MINIMUM $\text{right } x$

x

x

$y \leftarrow p \ x$

x

TREE-SUCCESSOR

$O \ h$

TREE-PREDECESSOR

Теорема 13.1. SEARCH, MINIMUM, MAXIMUM, SUCCESSOR, TREE-PREDECESSOR

FOR PREDECESSOR

h

$O \ h$.

Упражнения

13.2-1

$\begin{matrix} , & , & , & , & , & , & , & , \\ , & , & , & , & , & , & , & , \\ , & , & , & , & , & , & , & , \\ , & , & , & , & , & , & , & , & , \\ , & , & , & , & , & , & , & , \end{matrix}$

B

C

$$a \leqslant b \leqslant c$$

$$a \in A \quad b \in B \quad c \in C$$

13.2-3
SUCCESSOR

TREE

13.2-4

$$n -$$

$$O \ n$$

13.2-5
SUCCESSOR

$$\begin{matrix} k \\ O \ k \quad h \quad h \end{matrix}$$

TREE

13.2-6 T

$$x$$

$$y$$

$$x$$

$$key \ x$$

$$key \ y$$

13.3.

Добавление

рис. 13.3

13.

TREE-INSERT T, z $y \leftarrow \text{NIL}$ $x \leftarrow \text{root } T$ **while** $x \neq \text{NIL}$ **do** $y \leftarrow x$ **if** $\text{key } z < \text{key } x$ **then** $x \leftarrow \text{left } x$ **else** $x \leftarrow \text{right } x$ $p \leftarrow y$ **if** $y = \text{NIL}$ **then** $\text{root } T \leftarrow z$ **else if** $\text{key } z < \text{key } y$ **then** $\text{left } y \leftarrow z$ **else** $\text{right } y \leftarrow z$

TREE-INSERT

TREE-SEARCH

ITERATIVE-TREE-SEARCH

$$y \qquad \qquad \qquad \text{key } z < \text{key } x$$
 x x

NIL

NIL

 z $O(h)$ h

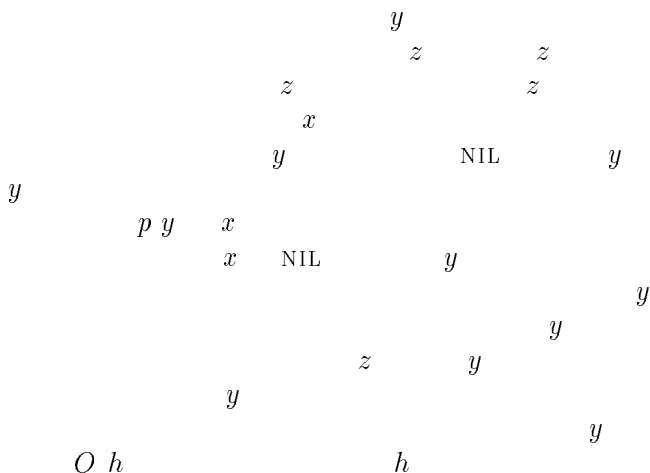
TREE-DELETE T, z

```

if  $left\ z \quad NIL \quad right\ z \quad NIL$ 
  then  $y \leftarrow z$ 
  else  $y \leftarrow \text{TREE-SUCCESSOR } z$ 
if  $left\ y \neq NIL$ 
  then  $x \leftarrow left\ y$ 
  else  $x \leftarrow right\ y$ 
if  $x \neq NIL$ 
  then  $p\ x \leftarrow p\ y$ 
if  $p\ y \neq NIL$ 
  then  $root\ T \leftarrow x$ 
  else if  $y \neq left\ p\ y$ 
    then  $left\ p\ y \leftarrow x$ 
    else  $right\ p\ y \leftarrow x$ 
if  $y \neq z$ 
  then  $key\ z \leftarrow key\ y$ 
   $\triangleright$ 
return  $y$ 

```

y



Теорема 13.2.

$O(h)$, h

INSERT DELETE

.

Упражнения

13.3-1

INSERT

13.3.2

TREE-

13.3-3 n

TREE-INSERT
INORDER-TREE-WALK

13.3-4

13.3-5 y
TREE-DELETE y

TREE-DELETE

13.3-6

x y

13.3-7 z TREE-DELETE z

13.4

$O(h)$ h

$$O \lg n$$

n

Лемма 13.3.

$$\begin{aligned}
 & T(k_1, k_2, \dots, k_n) \text{ (} k_i \text{)} \\
 & \quad i \quad j, \\
 & \quad k_i \quad \min \quad k_l \quad \leq l \leq i \quad k_l \quad k_j \\
 & \quad k_i \quad k_j \quad k_1, \dots, k_i, \\
 & \quad k_i \quad \max \quad k_l \quad \leq l \leq i \quad k_l \quad k_j \\
 & \quad k_i \quad k_j \\
 & \quad k_1, \dots, k_i) \\
 & \quad \Rightarrow \quad k_i \quad k_j \\
 & \quad i \quad j \quad T_i \quad T_i \quad k_i \quad k_j \quad T \quad T_i \\
 & \quad k_1, k_2, \dots, k_i \quad k_i \quad k_i \quad k_j \quad k_i \quad k_1, k_2, \dots, k_i \\
 & \quad k_j \quad k_j \\
 & \quad \Leftarrow \quad k_i \quad k_j \quad k_j \quad k_i \quad k_i \\
 & \quad k_1, k_2, \dots, k_i \quad k_j \quad k_i \quad k_i \\
 & \quad k_j \quad k_i \quad k_i
 \end{aligned}$$

□

$$k_j \qquad T \qquad k_j$$

$$d \; k_j, T \qquad G_j$$

$$k_1, \ldots, k_t \qquad k_j \qquad \leqslant t \leqslant j -$$

$$t \qquad , \qquad , \ldots, j - \qquad G_j$$

$$L_j$$

$$j \qquad \mathcal{C}$$

$$k_1, \ldots, k_j$$

Лемма 13.5. $k_1, k_2, \ldots, k_n$

n i

k_1, k

$$S:$$

$$S \qquad k_i \qquad \leqslant i \leqslant n \qquad k_l \qquad k_i$$

$$\mathbf{P} \; S \qquad \beta \qquad H_n \leqslant n^2, \qquad I$$

$$, \qquad \beta \approx ,$$

$$k_1, \ldots, k_i \qquad i \qquad i$$

$$\ldots \; i$$

$$S$$

$$k_1 \qquad k_i$$

$$t \leq \beta \frac{H_n}{\ln \beta - \beta} \dots n \beta \approx \dots,$$

$$P(d(k_j, T) \leq \beta H_n) \leq P(S \leq \beta H_n) \leq n^2.$$

$$n$$

$$\beta H_n$$

$$n$$

$$n$$

$$-n$$

$$\beta H_n$$

$$\beta^n H_n - n$$

$$n \leq n \leq O(\lg n)$$

□

Упражнения

13.4-1

$$\omega(\lg n) \leq \Theta(\lg n)$$

13.4-2

$$n \leq n$$

13.4-3

$$r \leq t$$

$$tH_n \leq n^r$$

13.4-4

RANDOMIZED-QUICKSORT

$$n$$

$$k$$

$$c$$

$$-c \cdot n^k$$

$$cn \lg n$$

13-1 Двоичные деревья поиска и равные ключи

n

5.

x

$b \ x$

$b \ x$

3.

2.

3-2 Цифровые деревья

$$a = a_0 a_1 \dots a_p \quad b = b_0 b_1 \dots b_q$$

a лексикографически меньше b a is lexicographically less than b

$$i = 0, 1, \dots, j - 1 \quad a_j = b_j \quad a_i < b_i \quad j = \min(p, q)$$

цифрового дерева radix tree

$$a = a_0 a_1 \dots a_p \quad a_i$$

3-3 Средняя глубина вершины в случайном двоичном дереве

$$a. \quad \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T)$$

$$b. \quad \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T)$$

$$c. \quad \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T)$$

$$d. \quad \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T)$$

$$e. \quad \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T)$$

$$h \qquad O \ h$$

$$O \lg n$$

14.1.

-

Красно-чёрное дерево red black tree

red

black

сбалансир-

рованным balanced

color
p

key

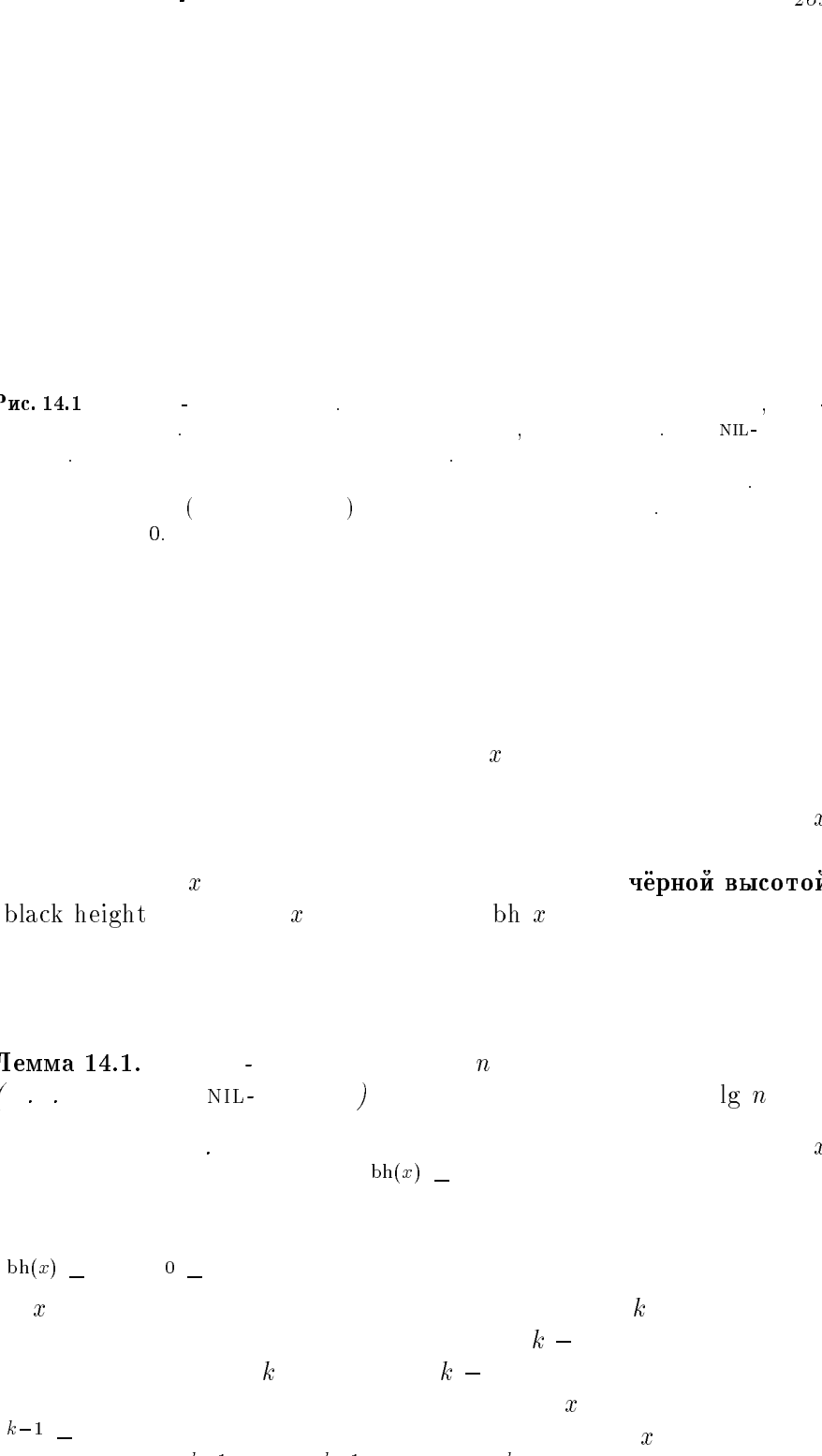
left

right

NIL

NIL

left *right*



h

$$n \leq h^2 - 1.$$

 $\lg n$

$$h \leq \lg n$$

□

SEARCH MINIMUM

MUM MAXIMUM SUCCESSOR PREDECESSOR

 $O \lg n$
 $O h$
 h
 n
 $O \lg n$

TREE-INSERT

TREE-DELETE

DELETE

RB

 $O \lg n$

RB

Упражнения

14.1-1

 $, \dots,$

NIL

14.1-2

14.1-3

 x

14.1-4

 k

14.1-5

 n

рис. 14.2

ROTATE

y

α $key\ y$, $key\ x$, β , γ .

RB

вращений rotations

x

y NIL y

x y

y x

LEFT-ROTATE $right\ x \leftarrow NIL$

LEFT-ROTATE T, x

$y \leftarrow right\ x \triangleright y$

$right\ x \leftarrow left\ y \triangleright y$

x

if $left\ y \neq NIL$

then $p\ left\ y \leftarrow x$

$p\ y \leftarrow p\ x \triangleright$

x

y

if $p\ x = NIL$

then $root\ T \leftarrow y$

else if $x = left\ p\ x$

then $left\ p\ x \leftarrow y$

else $right\ p\ x \leftarrow y$

Рис. 14.3

Упражнения

14.2-1

Р

14.2-2

14.2-3

14.2-4

α β γ

14.2-5

$O \lg n$

TREE-INSERT

RB

```

RB-INSERT  $T, x$ 
    TREE-INSERT  $T, x$ 
     $color\ x \leftarrow RED$ 
    while  $x \neq root\ T$   $color\ p\ x \neq RED$ 
        do if  $p\ x = left\ p\ x$ 
            then  $y \leftarrow right\ p\ p\ x$ 
                if  $color\ y = RED$ 
                    then  $color\ p\ x \leftarrow BLACK$   $\triangleright$ 
                         $color\ y \leftarrow BLACK$   $\triangleright$ 
                         $color\ p\ p\ x \leftarrow RED$   $\triangleright$ 
                         $x \leftarrow p\ p\ x$   $\triangleright$ 
                else if  $x = right\ p\ x$ 
                    then  $x \leftarrow p\ x$   $\triangleright$ 
                        LEFT-ROTATE  $T, x$   $\triangleright$ 
                         $color\ p\ x \leftarrow BLACK$   $\triangleright$ 
                         $color\ p\ p\ x \leftarrow RED$   $\triangleright$ 
                        RIGHT-ROTATE  $T, p\ p\ x$   $\triangleright$ 
            else

```


рис. 14.5 1. 3: x
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ε x $()$ $()$.
 $p p x$

Рис. 14.6

3

x p x

p x

RE

Т

Упражнения

14.3-1

x

14.3-2

14.3-3

14.3-4

$\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta \ \varepsilon$

k

14.3-5

n

n

14.3-6

RB-INSERT

14.4.

$O \lg n$

$s \ \text{??}$

T

sentinel

NIL
 $\text{nil}[T]$

RB-DELETE T, z

if $left\ z \quad nil$

then $y \leftarrow z$

else $y \leftarrow T$

if $left\ y \neq nil$

then $x \leftarrow l$

else $x \leftarrow r$

$p\ x \leftarrow p\ y$

if $p\ y \quad nil\ T$

then $root\ T$

else if y

then

else

if $y \neq z$

then $key\ z$

$\triangleright$

if $color\ y \quad B$

then RB-D

return y

```

DELETE-FIXUP  $T, x$ 
while  $x \neq \text{root } T$   $\wedge$   $\text{color } x = \text{BLACK}$ 
  do if  $x = \text{left } p\ x$ 
    then  $w \leftarrow \text{right } p\ x$ 
      if  $\text{color } w = \text{RED}$ 
        then  $\text{color } w \leftarrow \text{BLACK}$  ▷
               $\text{color } p\ x \leftarrow \text{RED}$  ▷
              LEFT-ROTATE  $T, p\ x$  ▷
               $w \leftarrow \text{right } p\ x$  ▷
      if  $\text{color } \text{left } w = \text{BLACK}$ 
         $\text{color } \text{right } w \leftarrow \text{BLACK}$ 
      then  $\text{color } w \leftarrow \text{RED}$  ▷
             $x \leftarrow p\ x$  ▷
      else if  $\text{color } \text{right } w = \text{BLACK}$ 
        then  $\text{color } \text{left } w \leftarrow \text{BLACK}$  ▷
               $\text{color } w \leftarrow \text{RED}$  ▷
              RIGHT-ROTATE  $T, w$  ▷
               $w \leftarrow \text{right } p\ x$  ▷
               $\text{color } w \leftarrow \text{color } p\ x$  ▷
               $\text{color } p\ x \leftarrow \text{BLACK}$  ▷
               $\text{color } \text{right } w \leftarrow \text{BLACK}$  ▷
              LEFT-ROTATE  $T, p\ x$  ▷
               $x \leftarrow \text{root } T$  ▷
      else

```

x

x

$x \leftarrow root\ T$
 x

x

w
 $p\ x$
 w
 x
 $nil\ T$
 w
 x

$\alpha, \beta, \dots, \zeta$

$\alpha\ \beta$
 x
 $\gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$
 B

α

RB-DELETE-FIXUP

w
 x
 w
 $p\ x$
 w
 $p\ x$
 x
 w
 w
 w
 w
 x
 $p\ x$

w w

RB

 x w x $p \ x$ x

RB

 $x \leftarrow \text{root } T$

RB-DELETE

 n $O \lg n$

RB-DELETE

RB-DELETE-FIXUP

 $O \lg n$

RB-DELETE-FIXUP

 O x $O \lg n$

RB-DELETE-FIXUP

 $O \lg n$

RB-DELETE

 $O \lg n$

Упражнения

4.4-1

RB-DELETE

4.4-2

 $, , , , ,$ $, , , , ,$

4.4-3

RB-DELETE-FIXUP

 $\text{nil } T$

4.4-4

LEFT-ROTATE

NIL

4.4-5

Рис. 14.7
DELETE-FIXUP.

c *count* c

14.4-6

14-1 Динамические множества с сохранением предыдущих версий

persistent data structures

S INSERT DELETE SEARCH
 S

r'

right

p

key left

a.

б.

k

PERSISTENT-TREE-INSERT
 T

в.

h

г.

n

Рис. 14.8 ()

2, 3, 4, 7, 8, 1
5.

, r' ,

, r . -

5.

$\Omega \ n$

∂ .

$O \lg n$

14-2 Операция объединения красно-чёрных деревьев
объединения join

$S_1 \quad S_2 \quad x$
 $key\ x_1 \leq key\ x \leq key\ x_2 \quad x_1 \in S_1 \quad x_2$
 $S \quad S_1 \quad x \quad S_2$

σ

- c.** $bh\ T_1$ $bh\ T_2$ $O\ \lg n$ T_1
- d.** $bh\ T_2$ y
- e.** T_y T_x T_2 O y T_y
- f.** x RB $O\ \lg n$
- g.** $RB-JOIN$ $O\ \lg n$

i

15.1.

i

$O(n)$

n

i

$O(\log n)$

x
 NIL
 x
 size NIL

$\text{size } x$
 $\text{size left } x$
 $\text{size right } x$
 $.$

$\text{nil } T$

NIL
 size

Поиск i -го по величине элемента

size
 i
 $\text{OS-SELECT } x, i$
 i
 T
 $\text{OS-SELECT } \text{root } T, i$
 $\text{OS-SELECT } x, i$
 $r \leftarrow \text{size left } x$
if $i \leq r$
then return x
elseif $i \leq r$
then return $\text{OS-SELECT } \text{left } x, i$
else return $\text{OS-SELECT } \text{right } x, i - r$

Рис. 15.1

x
 $size\ x$
 x .

 $O \log n$

 SELECT n

Определение порядкового номера элемента

OS-RANK
 T

OS-RANK T, x

$r \leftarrow size\ left\ x$

$y \leftarrow x$

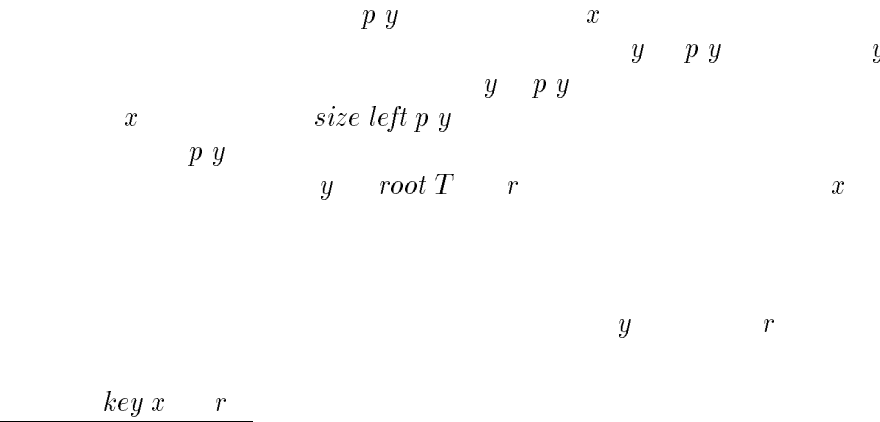
while $y \neq root\ T$

do if $y \neq right\ p\ y$

then $r \leftarrow r + size\ left\ p\ y$

$y \leftarrow p\ y$

return r



OS-RANK n O y $O\ \log\ n$

Рис. 15.2

,
,

Упражнения

15.1-1

15.1-2

15.1-3

15.1-4

k

15.1-5

x $O \log n$ **15.1-6**

OS-SELECT

OS-RANK

 $size$ x x $size$ **15.1-7** n $O \ n \log n$ **15.1-8** n n $O \ n \lg n$ C_n^2

$O \log n$

size

OS-SELECT

RANK

size

OS-SELECT O

Дополнительная информация для красно-чёрных деревьев

Теорема 15.1 (Пополнение красно-чёрного дерева).

		$p\ x$	$f\ x$
NIL	O	$O\ \lg n$	$O\ \log n$
	$O\ \lg n$		
	f		
	$O\ \log n$		$O\ \log n$
		$size$	
	O	$O\ \log n$	

Упражнения

15.2-1

0

15.2-2

15.2-3

15.2-4

$$\otimes$$

$$M$$
 a
$$M$$
 $\mathcal{X}$
$$f(x) = a_1 x_1 \otimes a_2 x_2 \otimes \dots \otimes a_m x_m \quad x_1, x_2, \dots, x_m$$
$$f$$

0

 $size$

15 2-5

$$a \leq k \leq b \quad x \quad k \quad \Theta \quad m \quad \log n \quad n \quad m$$

15.3.

Отрезком closed interval t
 terval t_1, t_2
 $t_1 \leq t \leq t_2$
 half open interval $t_1 \leq t_2$ Полуинтервал
 интервал open interval

t_1, t_2 i
 $low\ i$ t_1 левый конец low endpoint
 $high\ i$ t_2 правый конец high endpoint
 i i' перекрываются overlap $low\ i \leq high\ i'$
 $low\ i' \leq high\ i$ $i \cap i' \neq \emptyset$

$i \cap i'$

$i \cap i'$
 $high\ i$ $low\ i'$
 $high\ i'$ $low\ i$

Деревом промежутков interval tree

Рис. 15.3

$$\begin{array}{c}
 i' \\
 \text{high } i' \quad \text{low } i' \leq \text{high } i \cdot () \quad \text{high } i \quad \text{low } i' \cdot () \quad \text{high } i' \quad \text{low } i \cdot () \quad \text{low } i' \leq
 \end{array}$$

Шаг 1: Базовая структура данных

 x
 $\text{int } x$
 $\text{low int } x$

Шаг 2: Дополнительная информация

 $\text{max } x$
 x

Шаг 3: Обновление дополнительной информации

Рис. 15.4

). (

Шаг 4: Новые операции

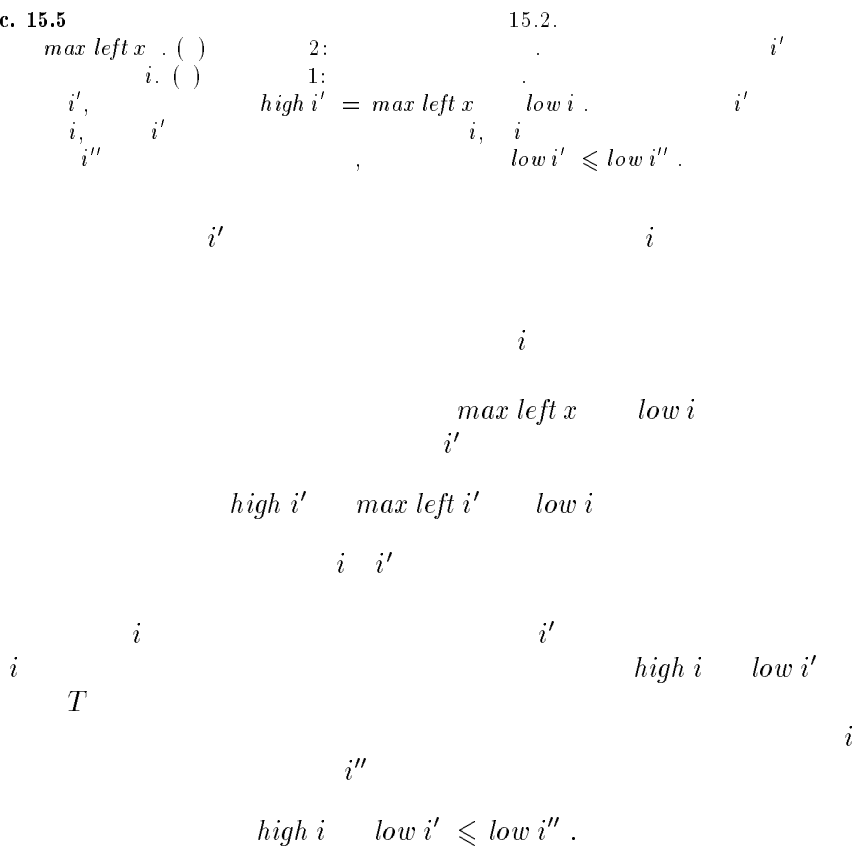
INTERVAL

 i

NIL

INTERVAL-SEARCH T, i $x \leftarrow \text{root } T$ **while** $x \neq \text{NIL}$ **and** $\text{int } x$ **do if** $\text{left } x \neq \text{NIL}$ **then** $x \leftarrow \text{left } x$ **else** $x \leftarrow \text{right } x$ **return** x

Рис. 15.5



Упражнения

15.3-1

LEFT-ROTATE
 $\max$ O

15.3-2

INTERVAL-SEARCH

15.3-3

15.3-4

i T i
 $O \min n, k \log n$ k

15.3-5

INTERVAL-SEARCH-EXACTLY T, i
 x T $low \ int \ x$ $low \ i$ $high \ int \ x$ $high \ i$
 NIL
 i i
 INTERVAL-SEARCH-EXACTLY
 $O \log n$

15.3-6

Q
 MIN-GAP Q $, , , , ,$ MIN-GAP Q $-$
 MIN-
 GAP

15.3-7

n
 $O \ n \log n$

15-2 Детская считалка

Задача о детской считалке Josephus problem

$$m \leq n$$

m

n, m

Josephus permutation

mutation

n

m

, , , , , ,

a.

m

n

$O(n)$

б.

n, m

$O(n \log n)$



16.1.

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

$$n \qquad A_1, A_2, \dots, A_n$$

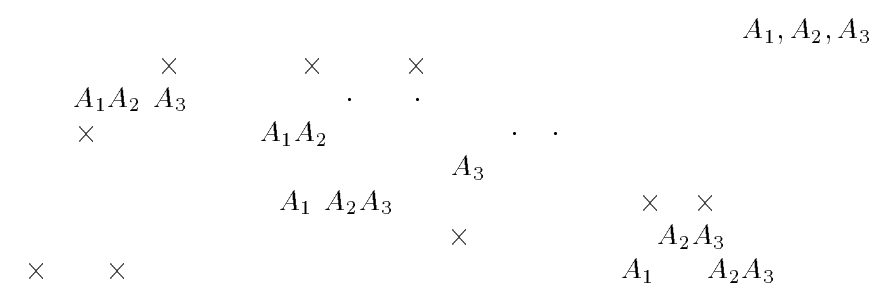
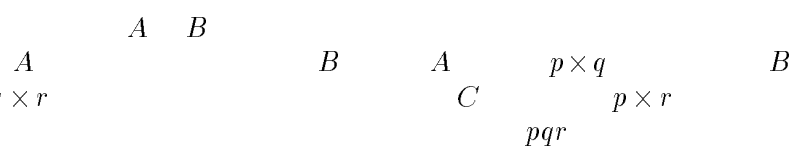
полностью расставлены скобки product is full

MATRIX-MULTIPLY A, B

```

if columns  $A \neq$  rows  $B$ 
    then error
else for  $i \leftarrow 1$  to rows  $A$ 
        do for  $j \leftarrow 1$  to columns  $B$ 
            do  $C[i, j] \leftarrow 0$ 
                for  $k \leftarrow 1$  to columns  $A$ 
                    do  $C[i, j] \leftarrow C[i, j] + A[i, k] \cdot B[k, j]$ 
        return  $C$ 

```



Задача об умножении последовательности матриц matrix chain multiplication problem

Given a sequence of matrices $A_1, A_2, \dots, A_n$ where A_i has dimensions $p_{i-1} \times p_i$.

$A_1 A_2 \dots A_n$

Количество расстановок скобок

$$k \qquad n-k$$

$$P_n = \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \sum_{k=1}^{n-1} P_k P_{n-k} \end{array} \right), \qquad n$$

чисел Каталана

$$P_n = C_{n-1},$$

$$C_n = \frac{1}{n} C_{2n}^n = \Omega(n^{-3/2}).$$

$$n$$

$$n$$

Шаг 1: строение оптимальной расстановки скобок

Шаг 2: рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}
 & m_{i,j} = \min_{i \leq k \leq j} \{ m_{i,k} + m_{k,j} + p_{i-1}p_kp_j \} \\
 & \text{где } m_{i,i} = 0, \quad m_{i,j} = A_i A_{i+1} \dots A_j \quad \text{для } i < j.
 \end{aligned}$$

Шаг 3: вычисление оптимальной стоимости

$$\leq i \leq j \leq n \qquad C_n^2 = n \cdot \Theta(n^2)$$

$$A_i = \begin{matrix} p_{i-1} \times p_i & i = 1, \dots, n \\ p_0, p_1, \dots, p_n & \text{length } p = n \\ m_{i,j} & 1 \leq i, j \leq n, \dots, n \\ s_{i,j} & 1 \leq i, j \leq n, \dots, n \end{matrix}$$

MATRIX-CHAIN-ORDER p

```

 $n \leftarrow \text{length } p - 1$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
    do  $m[i, i] \leftarrow 0$ 
for  $l \leftarrow 2$  to  $n$ 
    do for  $i \leftarrow 1$  to  $n - l + 1$ 
        do  $j \leftarrow i + l - 1$ 
             $m[i, j] \leftarrow \infty$ 
            for  $k \leftarrow i$  to  $j - 1$ 
                do  $q \leftarrow m[i, k] + m[k + 1, j] + p_i \cdot p_{k+1} \cdot p_{j+1}$ 
                    if  $q < m[i, j]$ 
                        then  $m[i, j] \leftarrow q$ 
                             $s[i, j] \leftarrow k$ 
return  $m[1, n]$ 

```


MATRIX-CHAIN-ORDER $O(n^3)$

n

Шаг 4: построение оптимального решения

MATRIX-CHAIN-ORDER

s

$A_{1..n}$

s, s, n

$A_{1..s-1, n} \quad s-1, n \quad , n$

$A_{s-1, n+1..n}$

$A_{i..j}$

$A_1, A_2, \dots, A_n$

MATRIX-CHAIN-ORDER

$A_1 A_2 \dots A_n$

MATRIX-CHAIN-

MATRIX-CHAIN-MULTIPLY A, s, i, j

if $j - i$

then $X \leftarrow$ MATRIX-CHAIN-MULTIPLY

$Y \leftarrow$ MATRIX-CHAIN-MULTIPLY

return MATRIX-MULTIPLY X, Y

else **return** 4:

Упражнения

16.1-1

$$p \qquad , \qquad , \qquad , \qquad , \qquad , \qquad ,$$

16.1-2

PRINT-OPTIMAL-PARENS
 s

MATRIX-CHAIN-ORDER

16.1-3

$$\begin{matrix} R_{i,j} \\ \text{MATRIX-CHAIN-ORDER} \end{matrix} \qquad m_{i,j} \qquad m$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{i,j} = \frac{n^3 - n}{6}.$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$n$$

16.1-4

$$n \qquad n -$$

16.2.

Оптимальность для подзадач

обладает свойством оптимальности для задач has optimal substructure

Перекрывающиеся подзадачи

overlapping subproblems

перекрывающиеся подзадачи

MATRIX-CHAIN-ORDER

$$m_{i,j}, m_{i,k}, m_{k,j}, m_{i,i}, m_{k,k}, m_{j,j}$$

$m_{i,j}$

$$A_{i..j} = A_i A_{i+1} \dots A_j$$

RECURSIVE-MATRIX-CHAIN p, i, j

if $i = j$

then return

$m_{i,j} \leftarrow \infty$

for $k \leftarrow i$ to $j - 1$

do $q \leftarrow \text{RECURSIVE-MATRIX-CHAIN } p, i, k$

$\text{RECURSIVE-MATRIX-CHAIN } p, k + 1, j$ $p_{i-1} p_k p_j$

if $q < m_{i,j}$

then $m_{i,j} \leftarrow q$

return $m_{i,j}$

Пр. 16.2

$$i \quad j. \quad \text{RECURSIVE-MATRIX-CHAIN}(p, 1, 4). \quad ($$

$$\text{CHAIN } p, \quad , \quad \text{RECURSIVE-MATRIX} \quad i \quad j$$

$$i, j \quad \text{RECURSIVE-MATRIX-CHAIN } p, \quad ,$$

$$n \quad T \ n$$

$$T \quad ,$$

$$T \ n \quad \sum_{k=1}^{n-1} T \ k \quad T \ n - k \quad , \quad n$$

$$k \quad T \ i \quad i \quad , \quad , \dots, n -$$

$$n -$$

$$T \ n \quad \sum_{i=1}^{n-1} T \ i \quad n.$$

$$T \ n \quad n-1 \quad n \quad n$$

$$T$$

$$0$$

$$T \ n \quad \sum_{i=1}^{n-1} i-1 \quad n \quad \sum_{i=0}^{n-2} i \quad n$$

Динамическое программирование «сверху вниз»

 i, j

memoization

RECURSION

MATRIX-CHAIN

MEMOIZED-MATRIX-CHAIN p

```

 $n \leftarrow \text{length } p - 1$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
    do for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$ 
        do  $m[i, j] \leftarrow \infty$ 
return LOOKUP-CHAIN  $p, 1, n$ 

```

LOOKUP-CHAIN p, i, j

```

if  $m[i, j] \neq \infty$ 
    then return  $m[i, j]$ 
if  $i = j$ 
    then  $m[i, j] \leftarrow 0$ 
    else for  $k \leftarrow i + 1$  to  $j$ 
        do  $q \leftarrow \text{LOOKUP-CHAIN } p, i, k$ 
             $\text{LOOKUP-CHAIN } p, k, j$ 
             $+ p_{i-1}k$ 
        if  $q < m[i, j]$ 
            then  $m[i, j] \leftarrow q$ 
return  $m[i, j]$ 

```

$m[i, j]$

RECURSIVE-MATRIX-CHAIN

MEMOIZED-MATRIX-CHAIN

 $m[i, j]$

MEMOIZED-MATRIX-CHAIN

 $O(n^3)$

MATRIX-CHAIN-ORDER

 $\Theta(n^2)$

MEMOIZED-MATRIX-CHAIN

 LOOKUP-CHAIN p, i, j
 j

 LOOKUP-CHAIN p, i, j
 $\Theta(n^2)$
 $O(n)$

LOOKUP-CHAIN

 $O(n^3)$
 $O(n^3)$
 O
 $O(n^2)$
 $O(n)$
 $\Omega(n)$
 $O(n^3)$
 n
 $O(n^3)$
 $\Theta(n^2)$

Упражнения

16.2-1

16.2-2

16.3.

Z	$z_1, z_2, \dots, z_k$	X	$x_1, x_2, \dots, x_n$
но́стью	subsequence		подпоследовательность
$i_1, i_2, \dots, i_k$	z_j	x_{i_j}	j
Z	B, C, D, B		$, \dots, k$
X	A, B, C, B, D, A, B		

Diagram illustrating the concept of a common subsequence. The sequences are:

- X : A, B, C, B, D, A, B
- Y : B, D, C, A, B, A
- Z (common subsequence): B, C, B, A

The diagram shows the alignment of the sequences, with arrows indicating the mapping from the sequences to the common subsequence.

$$\begin{array}{c} B, D, A, B \\ Y \end{array} \quad X$$

Задача о наибольшей общей подпоследовательности

Строение наибольшей общей подпоследовательности

X

Y

m

m

$, \dots, m$

X

$x_1, x_2, \dots, x_m$

префикс

prefix

i

X_i

$x_1, x_2, \dots, x_i$

i

m

X

A, B, C, B, D, A, B

X_4

A, B, C, B

X_0

Теорема 16.1 (о строении НОП).

Z

$z_1, z_2, \dots, z_k$

X

$x_1, x_2, \dots, x_m$

Y

$y_1, y_2, \dots, y_n$

:

1.

x_m

y_n ,

z_k

x_m

y_n

Z_{k-1}

X_{m-1}

Y_{n-1} ;

2.

x_m / y_n

z_k / x_m ,

Z

X_{m-1}

Y ;

3.

x_m / y_n

z_k / y_n ,

Z

X_m

Y_{n-1} .

.

z_k / x_m

x_m

Y_n

Z

k

z_k

x_m

y_n

X_{m-1}

Y_{n-1}

Z_{k-1}

x_m

y_n

$X \ Y$

Z

z_k / x_m

Z

X_{m-1}

Y

Z

Y

X_{m-1}

Y

X

□

Рекуррентная формула

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & x_m & y_n & \\
& & & & X_{m-1} & Y_{n-1} & \\
x_m & y_n & & x_m / y_n & & & \\
& X_{m-1} & Y & & & X & Y_{n-1} \\
& & & & & X & Y \\
& & & & X & Y & \\
& X_{m-1} & Y & & X & Y_{n-1} & \\
& & & & & X_{m-1} & Y_{n-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X_i & Y_j & c_{i,j} \\
& & i \quad j \\
& & c_{i,j}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
c_{i,j} & (& i \quad j \\
& c_{i-1, j-1} & i, j \quad x_i \\
(\max c_{i, j-1}, c_{i-1, j} & , & i, j \quad x_i /
\end{array}$$

ис. 16.3 $c \leftarrow b,$ LCS-LENGTH $X =$
 $A, B, C, B, D, A, B) \quad Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle.$ (i, j)
 $c[i, j] \leftarrow b[i, j].$ 4
 $c[i, j] \leftarrow 0$ c[i, j]
 $c[i-1, j], c[i, j-1] \leftarrow c[i-1, j-1].$ x_i = y_j,
 $c[7, 6],$ (

LCS-LENGTH X, Y

$m \leftarrow \text{length } X$

$n \leftarrow \text{length } Y$

for $i \leftarrow 1$ **to** m

do $c[i, 1] \leftarrow$

for $j \leftarrow 1$ **to** n

do $c[i, j] \leftarrow$

for $i \leftarrow 1$ **to** m

do for $j \leftarrow 1$ **to** n

do if $x_i = y_j$

then $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$

$b[i, j] \leftarrow \nwarrow$

else if $c[i-1, j] > c[i, j-1]$

then $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$

$b[i, j] \leftarrow \uparrow$

else $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$

$b[i, j] \leftarrow \leftarrow$

return $c[m, n]$

Построение НОП

b

$Y \quad y_1, y_2, \dots, y_n$

i, j

PRINT-LC

PRINT-LCS b, X, length

PRINT-LCS b, X, i, j

if $i \quad j$

then return

if $b \ i, j \quad \nwarrow$

then PRINT-LC

elseif $b \ i, j \quad \uparrow$

then PRINT-LC

else PRINT-LCS $b,$

$BCBA$

Улучшение алгоритма

Упражнения

16.3-1 $\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ и $\langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ являются ли подпоследовательностями? Если да, то какие?

16.3-2 Пусть $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ и $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ — две последовательности. Пусть c — константа. Пусть $O(m, n)$ — функция, зависящая от m и n . Пусть $LCS(X, Y)$ — длина наибольшей общей подпоследовательности. Пусть $LCS(X, Y) \leq O(m, n)$. Пусть $LCS(X, Y) \leq c$. Пусть $LCS(X, Y) \leq c$.

16.3-3 Пусть $LCS(X, Y)$ — длина наибольшей общей подпоследовательности. Пусть $LCS(X, Y) \leq O(m, n)$. Пусть $LCS(X, Y) \leq c$.

16.3-4 Пусть $LCS(X, Y)$ — длина наибольшей общей подпоследовательности. Пусть $LCS(X, Y) \leq O(m, n)$. Пусть $LCS(X, Y) \leq c$.

16.3-5 Пусть $LCS(X, Y)$ — длина наибольшей общей подпоследовательности. Пусть $LCS(X, Y) \leq O(m, n)$. Пусть $LCS(X, Y) \leq c$.

16.3-6 Пусть $LCS(X, Y)$ — длина наибольшей общей подпоследовательности. Пусть $LCS(X, Y) \leq O(m, n)$. Пусть $LCS(X, Y) \leq c$.

16.4.

Многоугольник polygon

сторонами sides

вершиной vertex

простым simple

внутренностью interior

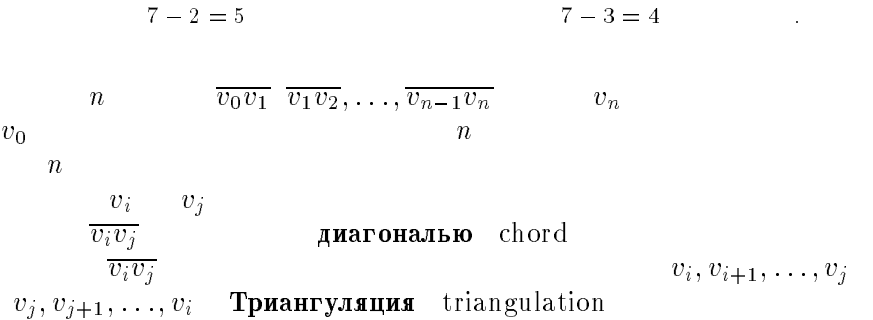
границей boundary

границей boundary

внешностью exterior

выпуклым convex

Рис. 16.4



n

$n -$

$n -$

Задача об оптимальной триангуляции optimal triangulation problem
lem P

$v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$

v_i

Рис. 16.5 . () $((A_1(A_2A_3))(A_4(A_5A_6)))$
 . 16.4 . () A_i
 $\overline{v_{i-1}v_i}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Триангуляции и расстановки скобок

деревья разбора parse tree

$$A_1 \ A_2A_3 \ A_4 \ A_5A_6 \ .$$

$$v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$$

$$\overline{v_0v_{n-1}}$$

$$\overline{v_0v_{n-1}}$$

а

$$\overline{v_0v_{n-1}}$$

$$\bigwedge v_0v_1v_2$$

$$v_0, v_1, v_2, v_3 \qquad v_3, v_4, v_5, v_6$$

$$\overline{v_0v_3} \qquad \overline{v_3v_6}$$

$$n-$$

$$n$$

$$n$$

$$\begin{array}{c} n \\ A_i \\ A_{i..j} \end{array} \qquad \overline{v_{i-1}v_j} \qquad \begin{array}{c} n \\ A_1A_2\dots A_n \\ i \qquad j \leq n \end{array} \qquad \overline{v_{i-1}v}$$

$$\begin{array}{c} n \\ A_1A_2\dots A_n \\ P \end{array} \qquad \begin{array}{c} A_i \\ v_0,v_1,\dots,v_n \end{array} \qquad \begin{array}{c} p_{i-1}\times p_i \\ w\triangle v_iv_jv_k \qquad p_ip_jp_k. \end{array}$$

$$\text{MATRIX-CHAIN-ORDER}$$

$$p \qquad v$$

$$\mathbf{d}\mathbf{g}_i \leftarrow m^{i,k} - m^{k,i} \qquad i = w \wedge w_1 \vee w_2 \vee \dots$$

Строение оптимальной триангуляции

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ n & & P & v_0, v_1, \dots, v_n & v_0 v_n \\ \triangle v_0 v_k v_n & \leq k \leq n - & & & T \\ \triangle v_0 v_k v_n & & & & \\ v_0, v_1, \dots, v_k & v_k, v_{k+1}, \dots, v_n & & & \end{array}$$

k

Рекуррентная формула

$$\begin{array}{ccccc} m_{i,j} & & & & \\ v_{i-1}, v_i, \dots, v_j & \leq i & j \leq n & & \\ & m_{i,n} & & & \\ v_{i-1}, v_i & m_{i,i} & i & , & , \dots, n \\ j-i & v_{i-1}, v_i, \dots, v_j & & & k \\ i \leq k \leq j - & \triangle v_{i-1} v_k v_j & & & \\ v_{i-1}, v_i, \dots, v_k & & & & \\ v_k, v_{k+1}, \dots, v_j & & & & \end{array}$$

$$m_{i,j} = \begin{cases} \min_{i \leq k \leq j} m_{i,k} + m_{k,j} - w(\triangle v_{i-1} v_k v_j) & i < j \\ m_{i,i} & i = j \end{cases}$$

MATRIX

CHAIN-ORDER

$$\Theta(n^2) \qquad \Theta(n^3)$$

Упражнения

16.4-1 $n -$ $n -$

16.4-2

16-1 Битоническая евклидова задача коммивояжёра
Евклидова задача коммивояжёра euclidean traveling salesman problem

n n NP

битонические пути bitonic tours



Рис. 16.6 () $\approx 24,88$, () $\approx 35,58$

16-2 Разбиение абзаца на строки

 n
 $l_1, l_2, \dots, l_n$
 M
 M

16-3 Стоимость редактирования

 $x \dots m$
 $y \dots n$

algorithm

altruistic

мощь редактирования edit distance $x \dots m \quad y \dots n$ **стои**
 $x \quad y$

16-4 Вечеринка в фирме

16-5 Алгоритм Витерби

$G \quad V, E \quad \sigma$
 $u, v \quad \sigma \quad u, v \quad \Sigma$
 v_0
 Σ
 σ

6..

алгоритмов greedy algorithms

жадных

compatible $i \quad j$ совместны com
 $f_i \leq s_j \quad s_i, f_i \quad s_j, f_j$
 $f_j \leq s_i$ **Задача о выборе заявок** activity
 selection problem

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n.$$

$$O \ n \log n$$

$$f \quad s$$

GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR s, f

$n \leftarrow \text{length } s$

$A \leftarrow$

$j \leftarrow$

for $i \leftarrow$ **to** n

do if $s_i \quad f_j$

then $A \leftarrow A \quad i$

$j \leftarrow i$

return A

A

j

$$f_j \quad \max \quad f_k \quad k \in A \quad ,$$

A

j

j

A

j

GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR

$\Theta \ n$

Правильность алгоритма

$$\begin{array}{ccc} i & s_i & f_i \\ \hline \end{array}$$

A

□

Упражнения

17.1-1

$1, 2, \dots, n$ m_i $1, 2, \dots, i$

GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR

17.1-2

задача о раскраске интервально
 го графа interval graph coloring problem

17.1-3

17.2. ?

Принцип жадного выбора

ного выбора greedy choice property

принцип жад-

Оптимальность для подзадач

optimal substructure

оптимальности для подзадач have

A

S'
 $s_i \quad f_1$

Каждый алгоритм или динамическое программирование?

Дискретная задача о рюкзаке

knapsack problem

 $v_i \quad w_i$
 $i \quad v_i$
 w_i
 W
 W

Непрерывная задача о рюкзаке

fractional knapsack problem

Рис. 17.2
 . ()

Упражнения

Упражнения

17.2-1

17.2-2

$O(nW)$ n

W

17.2-3

$$w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n$$

17.2-4

17.2-5 n $x_1, x_2, \dots, x_n$

17.2-6

$O(n)$

17.3.

двоичный код binary character

code

кодовым словом code

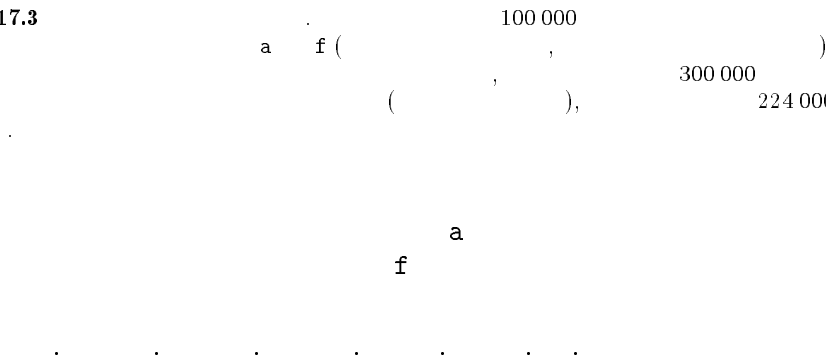
word **равномерного кода** fixed length code

a, b, ..., f

Неравномерный код variable length code

	a	b	c	d	e	f
--	---	---	---	---	---	---

Рис. 17.3



Префиксные коды

рис. 17.4

. 17.3.

) , $a = 000, \dots, f = 100.$ ()
 $a = 0, b = 101, \dots, f =$
 100.

...

...

 C C $C -$ T c C $f \ c$ $d_T \ c$ c

$$B \ T \sum_{c \in C} f \ c \ d_T \ c$$

СТОИМОСТЬ cost T

Построение кода Хаффмена

на Huffman code кодом Хаффмена

T

C

$$C = \{c \in C\}$$

$$f(c)$$

Q

f

HUFFMAN C

$n \leftarrow |C|$

$Q \leftarrow C$

for $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$

do $z \leftarrow \text{ALLOCATE-NODE}$

$x \leftarrow \text{left } z \leftarrow \text{EXTRACT-MIN } Q$

$y \leftarrow \text{right } z \leftarrow \text{EXTRACT-MIN } Q$

$f(z) \leftarrow f(x) + f(y)$

 INSERT Q, z

return EXTRACT-MIN Q

Рис. 17.6

17.2.

b c x y T T' T''

T

b c

x y

T''

T'

$f x \leq f b$ $f y \leq f c$
 T c y
 x y

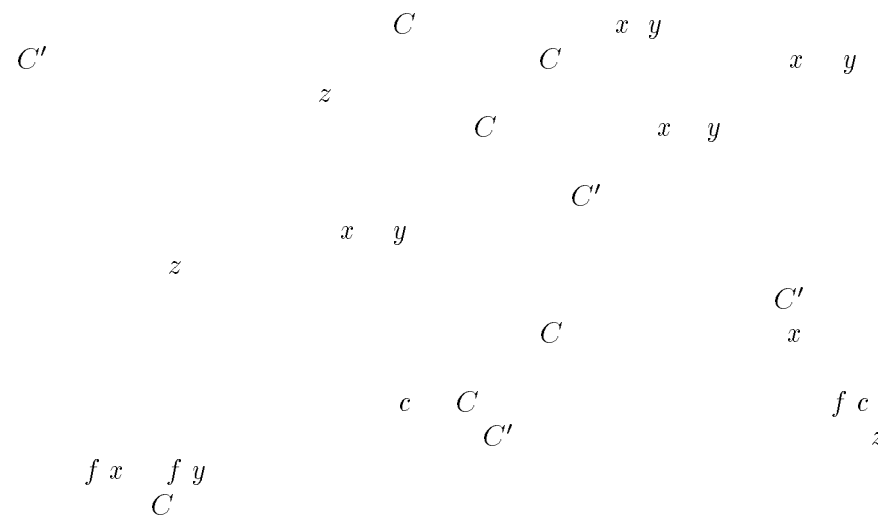
T''

$B T$ $B T'$ $B T''$ E

$f b d_T b$ $f x d_T x$ $f b d_{T'} b$ $f x d_{T'} x$
 $f b d_T x$ $f x d_T b$

$B T - B T'$ $f b d_T b$ $f x d_T x - f b d_T x - f x d_T b$
 $f b - f x$ $d_T b - d_T x$

$d_T b$ $d_T x$ b $f x \leq f b$
 $B T''$ T'' $B T'$ $B T''$ $B T$



Лемма 17.3.

$\Gamma \quad T' (\quad)$
 $f(x) \quad f(y) .$

$C \quad x, y \quad . \quad d_T(x) \quad d_T(y) \quad d_T(c) \quad d_{T'}(c) \quad c \in$
 $f(x) d_T(x) \quad f(y) d_T(y) \quad f(x) \quad f(y) \quad d_{T'}(z)$
 $f(z) d_{T'}(z) \quad f(x) \quad f(y) ,$
 $B(T) \quad B(T') \quad f(x) \quad f(y) \quad \square$

T' T

Теорема 17.4.

HUFFMAN

y C' z $x \quad y$

HUFFMAN

□

Упражнения**17.3-1****17.3-2**

a b c d e f g h .

 n n **17.3-3****17.3-4****17.3-5** n

$$n - \frac{n \log_2 n}{n -}$$
17.3-6**17.3-7**

8

17.3-8

17.4

17.4.1. Матроиды

Матроидом matroid

$M = (S, \mathcal{I})$

S

$\mathcal{I}$

независимыми independent

$B \in \mathcal{I} \quad A \subseteq B$

$A \in \mathcal{I}$

$\emptyset \in \mathcal{I}$

$\mathcal{I}$

наследственным hereditary

$A \in \mathcal{I} \quad B \in \mathcal{I} \quad A \subseteq B$

$x \in B \setminus A \quad A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$

$\mathcal{I}$

свойством замены exchange property

Hassler Whitney

не

матричными матроидами matric matroids

S

графовый матроид graphic matroid

$S_G, \mathcal{I}_G$

G

S_G

$\mathcal{I}_G$

Теорема 17.5.

$G = (V, E)$

$$B \quad A \quad A \quad B \quad G$$

$$V - k \quad V$$

$$V$$

$$A \quad V - A \quad B \quad V - B$$

$$V - B \quad V - A \quad B$$

$$T \quad A \quad T$$

$$u, v \quad u \quad v$$

$$A$$

$$A \quad x$$

□

$$M \quad S, \mathcal{I} \quad x \in A \in \mathcal{I}$$

$$\text{независимым от } A \text{ extension of } A \quad A \quad x$$

$$e \quad A$$

$$A$$

максималь-

ным maximal

Теорема 17.6.

$$A \quad B$$

$$A \quad B$$

$$x \in A \quad A \quad x$$

□

$$M_G$$

$$G$$

$$M_G \quad V -$$

$$G \quad \text{покрываю-}$$

$$\text{щим (остовным) деревом} \quad G \quad \text{spanning tree}$$

$$M \quad S, \mathcal{I} \quad \text{взвешенным weighted}$$

$$S \quad w$$

$$w$$

$$S$$

$$w \quad A \quad \sum_{x \in A} w \quad x$$

7.4.2. Жадные алгоритмы для взвешенного матроида

M $S, \mathcal{I}$ $A \subseteq M$

оптимальным optimal

задача о наименьшем покрывающем дереве
minimum spanning tree problem

G V, E w
 $w(e)$

e

w_0
 M_G $w'(e)$ $w_0 - w(e)$

A

$w'(A) = V - w_0 - w(A)$,

V

G
 M_G w'

M M $S, \mathcal{I}$ A S $S \setminus M$ $\mathcal{I}$ $\mathcal{I} \setminus M$
 w

GREEDY M, w

$A \leftarrow \emptyset$

$S \setminus M$

for $x \in S \setminus M$ x

do if $A \cup x \in \mathcal{I} \setminus M$

then $A \leftarrow A \cup x$

return A

$$O(n \log n) \quad n \quad S \quad \text{GREEDY}$$

$$f(n)$$

$$O(n \log n) \quad n f(n)$$

$$\text{GREEDY}$$

Лемма 17.7 (свойство жадного выбора для матроидов).

$$M \quad S, \mathcal{I}$$

$$w. \quad x \in S$$

$$y \in S \quad y \quad . \quad x$$

$$A \subseteq S.$$

$$B$$

$$x \in B$$

$$A' \quad x$$

$$B - \quad A'$$

$$B \quad A$$

$$x \quad B - \quad B \quad A \quad B$$

$$A \quad w A \quad w B - w y \quad w x \quad y$$

$$y \in B \quad B \quad A$$

$$w x \quad w y \quad x \quad w A \quad w B$$

$$A$$

Лемма 17.8. $M \quad S, \mathcal{I}$, $x \in S \quad x \in \mathcal{I}$,
 $A \quad x \in \mathcal{I} \quad A \subseteq S.$

Лемма 17.9 (свойство оптимальности подзадач для матроидов).

$$M \quad S, \mathcal{I}$$

$$, \quad x \in S$$

$$, \quad x$$

$$, \quad x,$$

$$x$$

$$M' \quad S', \mathcal{I}', \quad , \quad ,$$

$$S' \quad y \in S \quad x, y \in \mathcal{I} \quad ,$$

$$\mathcal{I}' \quad B \subseteq S \quad x \in B \quad x \in \mathcal{I} \quad ,$$

$$S'$$

$$M \quad M'$$

17.4

39

$$S$$

$$x$$

$$S'$$

$$w \ x$$

□

Теорема 17.10 (правильность жадного алгоритма для матроидов).

GREEDY,

,

$$M \quad S, \mathcal{I}$$

$$w$$

$$x \in S$$

$$x$$

$$A \subseteq S$$

$$x$$

$$M'$$

$$x$$

$$M$$

$$M'$$

□

$$A$$

$$A$$

Упражнения

17.4-1

$$\mathcal{I}_k$$

$$S$$

$$k$$

$$S$$

$$k$$

$$S, \mathcal{I}_k$$

17.4-2

$$T$$

$$A \subseteq S$$

$$S$$

17.4-3

$$S, \mathcal{I}$$

$$A' \subseteq S$$

$$\mathcal{I}'$$

$$S \quad A'$$

$$A \subseteq S$$

$$S, \mathcal{I}'$$

$$S, \mathcal{I}'$$

$$S, \mathcal{I}$$

17.4-4

$$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad \dots \quad S_k$$

17.5

заказов tasks S

Расписанием schedule S

задаче о расписании для заказов равной длительности с единственным исполнителем, сроками и штрафами scheduling unit time tasks with deadlines and penalties for a single processor

- S , $1, \dots, n$
- n $d_1, d_2, \dots, d_n$
срокaми deadlines $\leq d_i \leq n$ d_i
- n $w_1, w_2, \dots, w_n$
штрафaми penalties w_i
 S

i просрочен late

d_i
выполненным в срок early

17.9

352

каноническом виде canonical form

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & i & j & \\
 & k & k & & & & d_j & d_i \\
 & & & d_j & k & & & d_i & d_j & k \\
 j & & & & & & & & &
 \end{array}$$

$$A$$

$$A$$

$$A \subseteq S$$

independent

независимым

$$S \quad \mathcal{I}$$

$$\begin{array}{ccc}
 t & , & , \dots, n \\
 & & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \subseteq S \\
 N_t A
 \end{array}$$

$$t$$

Лемма 17.11.

$$A \subseteq S$$

$$:$$

$$\begin{array}{l}
 1. \quad A \\
 2. \quad t, \dots, n \quad N_t A \leq t, \\
 3. \quad A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \\
 & N_t A & t \\
 & & t
 \end{array}$$

$$t$$

$$i$$

$$i$$

$$\rightarrow$$

 d_i
 w_i

Рис. 17.7

17.5-2

 $O \rightarrow A$ A

17-1 Сдача с доллара

 n

а.

 n

б.

 $c^0, c^1, \dots, c^k$ c k

в.

17-2 Ациклические подграфы

а.

 $G = (V, E)$ $E, \mathcal{I} \quad A \in \mathcal{I}$ A

б. Матрицей инцидентности incidence matrix

 $G = (V, E)$ $V \times E$ M M_{ve} v e $E, \mathcal{I}$ c $G = (V, E)$

$$\begin{array}{ccccc}
& & E & & \\
z. & G & V, E & & \mathcal{I}
\end{array}$$

$$E, \mathcal{I}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\partial. & \text{Матрица} & \text{инцидентности} & & & & G \\
& V, E & V \times E & M & & M_{ve} & - \\
& & v & & e & & \\
& v & & e & & & \\
& & & \mathbb{R} & & &
\end{array}$$

$$e.$$

17-3 Ещё о расписаниях

$$j$$

$$d_j$$

$$a.$$

$$b.$$

greedoids

analysis

амортизационным анализом amortized

учётная стоимость amortized cost

MULTIPOP

INCREMENT

18.1.

Метод группировки aggregate method

 n $T \ n$ n $T \ n \ n$

Операции со стеком

Рис. 18.1
 . MUL

MULTIPO
 while n
 de

counter value

total cost

Рис. 18.2

16

INCREMENT.

INCREMENT.

$2k$.

Двоичный счётчик

$A \dots k -$
 A
 i
 k

INCREMENT

INCREMENT A

$i \leftarrow$

while $i = \text{length } A$ and $A[i]$

do $A[i] \leftarrow$

$i \leftarrow i$

if $i = \text{length } A$

then $A[i] \leftarrow$

k

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} A[i] \cdot 2^i$$

CREMENT

IN-

$$\begin{aligned} & \frac{k}{n} O \frac{n}{k} A \\ & A \frac{k}{n} \text{INCREMENT} A \frac{n}{n} \\ & n \frac{i}{N} \leq i \leq \lg n \quad i \quad \lg n \quad i \quad n \quad A \quad i \\ & \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{n}{i} = n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i} = n. \\ & O \frac{n}{n} \quad n \quad k \\ & O \frac{n}{n} \quad n \quad O \quad k \end{aligned}$$

Упражнения

18.1-1

MULTIPOP MULTIPUSH

O

18.1-2

DECREMENT

k k INCREMENT DECREMENT
 $\Theta \frac{n}{k}$

18.1-3

i i i
 n

18.2.

резерв credit

MULTIP

PUSH

MULTIPOP

Двоичный счётчик

INCREMENT

MENT

Упражнения

18.2-1

n

18.2.2

18.2-3

RESET

 n

INCREMENT

RESET

 k $O\ n$

18.3.

Метод потенциалов potential method

 n D_i i D_0

Потенциал potential

Ф

потен

циальной функцией potential function

 c_i i Учетной стоимостью amortized cost i

$$c_i = c_i - \Phi(D_i) + \Phi(D_{i-1}),$$

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n c_i - \Phi(D_n) + \Phi(D_0).$$

 Φ $\Phi(D_n)$ $\Phi(D_0)$ n $\Phi(D_0)$ $\Phi(D_n) - \Phi(D_0)$

Операции со стеком

PUSH POP MULT
 Φ
 ΦD_i ΦD_0 .

PUSH
 MULTIPOP m
 m $m - m$
 POP

$O\ n$

Двоичный счетчик

INCREMENT
 i
 INCREMENT t_i $b_i \leq b_i$
 INCREMENT
 MENT t_i
 $c_i \leq t_i$ $b_i - b_{i-1} \leq$

$$\sum_{i=1}^n c_i - \sum_{i=1}^n c_i - \Phi(D_n) - \Phi(D_0),$$

$$c_i \leq i$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \leq n - b_n - b_0.$$

$$b_0 \leq k$$

$$n \leq \Omega(k)$$

$$O(n)$$

INCREMENT

$$O$$

 k

Упражнения

18.3-1

$$\Phi(D_0)$$

 i

$$\Phi(D_0) /$$

$$\Phi'$$

$$\Phi'(D_0)$$

$$\Phi'(D_i)$$

 i Φ' Φ

18.3-2

18.3-3

INSERT

EXTRACT-MIN

$$O(\lg n)$$

 n

$$\Phi$$

INSERT

$$O(\lg n)$$

EXTRACT-MIN

$$O$$

18.3-4

MULTIPOP

 n

PUSH POP

 s_0 s_n

18.3-5

 b

$$n \leq \Omega(b)$$

 n

INCREMENT

$$O(n)$$

 b

18.3-6

18.4.

O

TABLE-INSERT

TABLE-DELETE

ячейку slot

коэффициентом заполнения load factor
 α T

T

расширять expand

TABLE-INSERT

```

    table  $T$ 
     $T \leftarrow \text{num } T$ 
    size  $T$ 
    size  $T$ 
num  $T$ 

TABLE-INSERT  $T, x$ 
    if size  $T$ 
        then
            table  $T$ 
            size  $T \leftarrow$ 
    if num  $T \leq$  size  $T$ 
        then
            new-table  $\leftarrow \cdot \text{size } T$ 
            table  $T \leftarrow \text{new-table}$ 
            table  $T$ 
            table  $T \leftarrow \text{new-table}$ 
            size  $T \leftarrow \cdot \text{size } T$ 
             $x \leftarrow \text{table } T$ 
num  $T \leftarrow \text{num } T$ 

```

TABLE-INSERT

$$i$$

$$i$$

$$c_i$$

$$i -$$

$$n$$

$$m$$

$$||g_m$$

$\Phi \quad T$

TABLE-INSERT

 $size_i$ $num_i \quad \Phi_i$

TABLE-INSERT

 $size_i \quad size_{i-1} \quad num_i \quad num_{i-1} \quad c_i$ $c_i \quad c_i \quad \Phi_i - \Phi_{i-1} \quad .$ i

TABLE-INSERT

 $size_i \quad size_{i-1} \quad num_{i-1} \quad c_i \quad num_i$ $c_i \quad c_i \quad \Phi_i - \Phi_{i-1}$ $num_i \quad num_i - size_i - \quad num_{i-1} - size_{i-1}$ $num_i \quad num_i - \quad num_i - \quad - \quad num_i - \quad - \quad num_i -$ $num_i \quad - \quad num_i - \quad .$ $num_i \quad size_i \quad \Phi_i \quad i$

18.4.2. Расширение и сокращение таблицы

TABLE-DELETE

сократить contract

Рис. 18.3

$2 \cdot num_i - size_i$

$i.$

num

Φ

Φ

num

$(size_i),$

(num_i)

TABLE-INSERT,

,

$size$

$(\Phi$

		TABLE-
DELETE		TABLE-INSERT
	TABLE-DELETE	
	<i>size T</i>	<i>num T</i>
		<i>n</i>
INSERT	TABLE-DELETE	TABLE-

$$\frac{\text{num } T \cdot \text{size } T}{\text{num } T} = \text{size } T \quad / \quad \text{size } T \quad \alpha \quad T$$

$$\Phi(T) = \begin{cases} \cdot num(T) - size(T), & \alpha(T) \leq 0, \\ size(T) - num(T), & \alpha(T) > 0. \end{cases}$$

$$\Phi \ T \quad num \ T$$

TABLE-INSERT	TABLE-DELETE	Φ
TABLE-INSERT	TABLE-DELETE	
<i>size</i>	<i>num</i>	

Рис. 18.4

$$\Phi_i = \begin{cases} (size_i), & (num_i < size_i) \\ 2 \cdot num_i - size_i, & \alpha_i \\ size_i - 2 - num_i, & \alpha_i \end{cases}$$

TABLE-INSERT TABLE-DELETE

i , num , Φ

O
 n $O\ n$

Упражнения

18.4-1 α_{i-1}
TABLE-INSERT

18.4-2

O

18.4-3

18.4-4

TABLE-DELETE

$$\Phi(T) = \text{num } T - \text{size } T,$$

TABLE

DELETE

18-1 Двоичный счетчик с обратным порядком битов

обращения битов индекса bit reversal permutation **обращение**

$$A[n-1] \dots A[0] \rightarrow A[a_{n-1} \dots a_0]$$

$$a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i$$

$$\text{rev}_k(a) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^{k-1-i}$$

BIT-REVERSED-INCREMENT

 n^k k $O\ n$ **18-2 Динамический двоичный поиск** $A_0, A_1, \dots, A_k$ n^k $n_{k-1}, n_{k-2}, \dots, n_0$ $\sum_{i=0}^{k-1} n_i$

!

 n_i A_i $A_0, \dots, A_n$

INSERT

DELETE

18-3 Сбалансированные по весу деревья x $size\ x$ x $\leq \alpha$ α -сбалансирован α balanced $size\ left\ x \leq \alpha \cdot size\ x$ $size\ right\ x \leq \alpha \cdot size\ x$ α -сбалансированный

α
INSERT DELETE

α

x

T

$\Delta(x) = \text{size left } x - \text{size right } x$

$\Phi(T)$

$$\Phi(T) \leq c \sum_{x \in T: \Delta(x) \geq 2} \Delta(x),$$

c

α

m

m

$O(m)$

c

α

α

O

α

n

$O \log n$



tent data structures

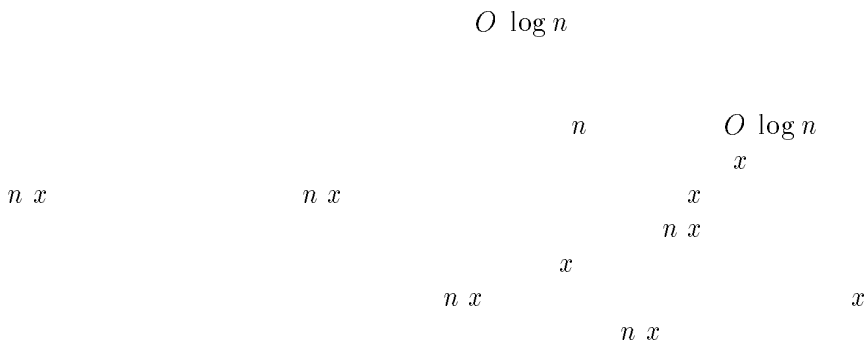


Рис. 19.2

Структуры данных на диске

Оперативная па-
мять main memory

secondary storage

ЖЁСТКИЙ ДИСК

дорожек tracks

секторов

Время доступа access time

Б-деревом B tree

x

a).

$n\ x$

б).

$key_1\ x \leq key_2\ x \leq \dots \leq key_{n\ x}\ x$

в).

$leaf\ x$

x

x

$n\ x$

$c_1\ x, c_2\ x, \dots, c_{n\ x+1}\ x$

$key_i\ x$

$k_1 \leq key_1\ x \leq k_2 \leq key_2\ x \leq \dots \leq key_{n\ x}\ x \leq k_{n\ x+1},$

k_i

$c_i\ x$

h

t

минимальной степенью minimum degree

a).

б).

$t -$

t

$t -$

полной full

t

- - дерево

tree

t

,

Высота Б-дерева

Теорема 19.1.

-

T

h

t

,

n

,

$$h \leq \log_t \frac{n}{h}.$$

.

h

t

t

t^2

...

h

t^{h-1}

$t -$

h

$$n \quad t - \sum_{i=1}^h t^{i-1} \quad t - \left(\frac{t^h - 1}{t - 1} \right) \quad t^h - 1,$$

□

n

$O \log n$

$\lg t$

Упражнения

19.1-1

t

19.1-2

t

Рис. 19.4 - 3
 x $n x$.

19.1-3

, , , ,

19.1-4

h

t

19.1-5

19.2.

-

SEARCH
INSERT

B-TREE-CREATE

B-TREE
B-TREE

•

DISK-READ

•

Поиск в Б-дереве

$n \ x$

TREE-SEARCH
B-TREE-SEARCH
 k

k T
SEARCH $root \ T, k$ $root \ T$
 k

y i
 $key_i \ y \ k$

NIL

B-TREE-SEARCH x, k

$i \leftarrow$

while $i \leq n \ x$ and $k \neq key_i \ x$

do $i \leftarrow i$

if $i \leq n \ x$ and $k = key_i \ x$

then return x, i

if $leaf \ x$

then return NIL

else DISK-READ $c_i \ x$

return B-TREE-SEARCH $c_i \ x$

i
 i $n \ x$

x

R

TREE-SEARCH

$\Theta \ h$ $\Theta \log_t n$ h
 $n \ x \leq t$

while

$O \ t$

O

Создание пустого Б-дерева

рис. 19.5 $t = 4$.
 y : y z . - S y x .

B-TREE-CREATE T

$x \leftarrow \text{ALLOCATE-NODE}$

$leaf\ x \leftarrow \text{TRUE}$

$n\ x \leftarrow$

DISK-WRITE x

$root\ T \leftarrow x$

B-TREE-CREATE

O

Разбиение вершины Б-дерева на две

разбиение splitting

$t -$

y

$t -$

ключ-медиана median key $key\ y$

B-TREE-SPLIT-CHILD x, i, y
 $z \leftarrow \text{ALLOCATE-NODE}$
 $\text{leaf } z \leftarrow \text{leaf } y$
 $n \leftarrow t -$
for $j \leftarrow$ **to** $t -$
 do $\text{key}_j z \leftarrow \text{key}_{j+t} y$
if not $\text{leaf } y$
 then for $j \leftarrow$ **to** t
 do $c_j z \leftarrow c_{j+t} y$
 $n \leftarrow t -$
for $j \leftarrow n$ **downto** i
 do $c_{j+1} x \leftarrow c_j x$
 $c_{i+1} x \leftarrow z$
for $j \leftarrow n$ **downto** i
 do $\text{key}_{j+1} x \leftarrow \text{key}_j x$
 $\text{key}_i x \leftarrow \text{key}_t y$
 $n \leftarrow n$
 DISK-WRITE y
 DISK-WRITE z
 DISK-WRITE x

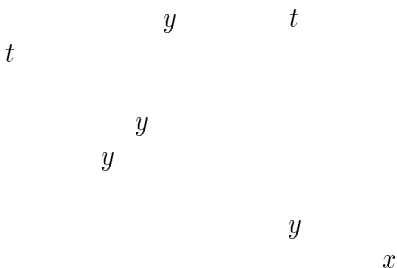


рис. 19.6 . 19.6. r - ($t = 4$) .
 s ,
 s -

B-TREE-INSERT T, k

$r \leftarrow \text{root } T$

if $n(r) = t - 1$

then $s \leftarrow \text{ALLOCATE-NODE}$

$\text{root } T \leftarrow s$

$\text{leaf } s \leftarrow \text{FALSE}$

$n(s) \leftarrow$

$c_1(s) \leftarrow r$

B-TREE-SPLIT-CHILD $s, _, r$

B-TREE-INSERT-NONFULL s, k

else B-TREE-INSERT-NONFULL r, k

B-TREE-INSERT-NONFULL

$$i \leftarrow n$$
if *leaf* x
then while i
do key_{i+1}
 $i \leftarrow i$
 $key_{i+1} \ x \leftarrow k$
 $n \ x \leftarrow n \ x$

DISK-WRITE

else while i
do $i \leftarrow i$
 $i \leftarrow i$

 DISK-READ c
if $n \ c_i \ x$
then B-TR

if k
then

Упражнения

19.2-1

$F, S, Q, K, C, L, H, T, V, W, M, R, N, P, A, B, X, Y, D, Z, E$

19.2-2

DISK-WRITE

DISK-READ

B-TREE-INSERT

DISK-WRITE

DISK-READ

19.2-3

19.2-4

$, \dots, n$

19.2-5

19.2-6

B Tree Search

$O \log n$

$t!$

19.2-7

t

t

a

bt

a

b

t

a

b

t $t -$

c

a).

5).

3).

a).

$$\begin{array}{c} k \\ k \quad x \\ k \end{array}$$
 x x

$$\begin{array}{c} y \\ t \end{array}$$
 x

$$\begin{array}{c} k \\ k' \end{array}$$
 k y k' x k k' z k t

$$\begin{array}{c} y \quad z \\ y \quad k \end{array}$$
 $t -$ z $t -$ z $x \quad k$ z y x k x $c_i \, x$ k $c_i \, x$ t k $c_i \, x$ $t -$ $t -$

F
 M
 G

Рис. 19.8

3, . . .

1:

-

2 :
 G

G
 (

F

D

B

6).

$c_i x$
 $c_i x$

$t -$

x

$O h$

h

O

DISK-READ

DISK

WRITE

$O th$

$O t \log_t h$

Упражнения

19.3-1

$C P V$

f

19.3-2

B-TREE-DELETE

p $p \bmod m$ $p \cdot m$ m $\Theta \cdot m$ $m \cdot n$ n n $O \cdot m$ O **19-2 Объединение и разделение 2-3-4 деревьев****объединения** join
$$S' \quad S'' \quad x \quad key\ x' \quad key\ x \quad key\ x'$$

$$x' \in S' \quad x'' \in S''$$
Разделение split S x

Биномиальные кучи

Процедура	Двоичные кучи (в худшем случае)	Биномиальные кучи (в худшем случае)	Фибоначчиевы кучи (в среднем)
MAKE-HEAP	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
INSERT	$\Theta(\lg n)$	$O(\lg n)$	$\Theta(1)$
MINIMUM	$\Theta(1)$	$O(\lg n)$	$\Theta(1)$
EXTRACT-MIN	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$O(\lg n)$
UNION	$\Theta(n)$	$O(\lg n)$	$\Theta(1)$
DECREASE-KEY	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(1)$
DELETE	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$O(\lg n)$

Рис. 20.1
(n)).

$O \lg n$ n

SEARCH
DECREASE-KEY DELETE

20.1.

20.1.1. Биномиальные деревья

Биномиальные деревьями binomial trees
 $B_0, B_1, B_2, \dots$

B_i B_{i+1}

depth

Рис. 20.2 ()

B_4 . () B_0 B_4 . B_k
 B

Лемма 20.1 (Свойства биномиальных деревьев).

1. k ;
2. k ;
3. C_k^i ;
4. , k ;
 $B_{k-1}, B_{k-2}, \dots, B_1, B_0$ (B_0)
 k B_0
 B_{k-1} B_{k-1}
 B_k
 $k-1$ $k-1$

$D_{k,i}$ B_k i

$D_{k,i} = D_{k-1,i} = D_{k-1,i-1} = C_{k-1}^i = C_{k-1}^{i-1}$

$$k - \begin{matrix} & & B_{k-1} \\ & & B_k \\ & k & \\ & & B_{k-2}, B_{k-3}, \dots, B_1, B_0 \\ & & B_{k-1} \end{matrix}$$

Следствие 20.2.

$$n \qquad \lg n$$

$$C_k^i$$

20.1.2. Биномиальные кучи

Биномиальная куча binomial heap H

свойства биномиальной кучи binomial heap proper

ies

H упорядочено в смысле куч is heap ordered

$$H$$

$$H$$

$$n$$

$$n$$

$$\lg n$$

$$H$$

$$H \text{ с}$$

$$B_3 \quad B_2 \quad B_0$$

Рис. 20.3

(13).

()

(*degree*).

x

sibling

p x

x

sibling x NIL

Рис. 20.4 B_4 , ;

H
 $head\ H$ H $head\ H$ NIL H

Упражнения

20.1-1 x
 $sibling\ x$ / NIL
 $degree\ sibling\ x$ $degree\ x$
 x

20.1-2 x
 $degree\ p\ x$ $degree\ x$

20.1-3 B_k

pos

torder walk

k j

20.2.

Создание новой кучи

Поиск минимального ключа

BINOMIAL-HEAP-MINIMUM

 n BINOMIAL-HEAP-MINIMUM H

```

 $y \leftarrow \text{NIL}$ 
 $x \leftarrow \text{head } H$ 
 $\text{min} \leftarrow \infty$ 
while  $x \neq \text{NIL}$ 
    do if  $\text{key } x < \text{min}$ 
        then  $\text{min} \leftarrow \text{key } x$ 
         $y \leftarrow x$ 
         $x \leftarrow \text{sibling } x$ 
return  $y$ 

```

BINOMIAL-HEAP-MINIMUM

 min y

B

MINIMUM

 $\lg n$

BINOMIAL-HEAP-MINIMUM

20.2.1. Объединение двух куч

BINOMIAL-HEAP-UNION

 $m \quad n$ B_k

BINOMIAL-LINK

 B_{k-1}

BINOMIAL-LINK y, z
 $y \leftarrow z$
sibling $y \leftarrow \text{child } z$
child $z \leftarrow y$
degree $z \leftarrow \text{degree } z$

O

y

BINOMIAL-HEAP-UNION

$H_1 \quad H_2$

BINOMIAL-LINK

BINOMIAL-HEAP-MERGE

$H_1 \quad H_2$

MERGE

BINOMIAL-HEAP-UNION H_1, H_2

$H \leftarrow \text{MAKE-BINOMIAL-HEAP}$

head $H \leftarrow \text{BINOMIAL-HEAP-MERGE } H_1, H_2$
 $H_1 \quad H_2$

$H_1 \quad H_2$

if *head* $H = \text{NIL}$

then return H

prev-x $\leftarrow \text{NIL}$

$x \leftarrow \text{head } H$

next-x $\leftarrow \text{sibling } x$

while *next-x* $\neq \text{NIL}$

do if *degree* $x < \text{degree } \text{next-x}$ **or**

sibling next-x $\neq \text{NIL}$

 and *degree sibling next-x* $< \text{degree } x$

then *prev-x* $\leftarrow x$ $\triangleright$

$x \leftarrow \text{next-x}$ $\triangleright$

else if *key* $x \leq \text{key } \text{next-x}$

then *sibling* $x \leftarrow \text{sibling } \text{next-x}$ $\triangleright$

 BINOMIAL-LINK *next-x*, x $\triangleright$

else if *prev-x* $= \text{NIL}$ $\triangleright$

then *head* $H \leftarrow \text{next-x}$ $\triangleright$

else *sibling prev-x* $\leftarrow \text{next-x}$ $\triangleright$

 BINOMIAL-LINK $x, \text{next-x}$ $\triangleright$

$x \leftarrow \text{next-x}$ $\triangleright$

next-x $\leftarrow \text{sibling } x$

return H

BINOMIAL-HEAP-UNION

$H_1 \quad H_2$

H

BINOMIAL-HEAP-MERGE

BINOMIAL-LINK

H_2

H

BINOMIAL-H

H

BINO

MERGE

$O \quad m$

m

$H_1 \quad H_2$

$H_1 \quad H_2$

H

• x

• $prev-x$

$sibl$

x

• $next-x$

$sibling \ x$

$next-x$

H

H_1

HEAP-UNION

H



рис. 20.6

BINOMIAL-HEAP-UNION.

x B_k l k . () 1: $\text{degree } x \neq \text{degree } \text{next-}x$.
 $\text{degree } x = \text{degree } \text{next-}x = \text{degree } \text{sibling } \text{next-}x$.
 3: $\text{degree } x = \text{degree } \text{next-}x \neq \text{degree } \text{sibling } \text{next-}x$, $\text{key } x \leq \text{key } \text{next-}x$.
 x , B_{k+1} . () 4: $\text{degree } x = \text{degree } \text{next-}x \neq \text{degree } \text{sibling } \text{next-}x$, $\text{key } \text{next-}x < \text{key } x$.
 $\text{next-}x$ B_{k+1}

next-x

next-x

x

next-x

x

next-x

x

x

x

next-

x

B_{k+1}

x

BINOMIAL-HEAP-UNION

$O \lg$

n

$H_1 \quad H_2$

$H_1 \quad H_2$

$O \lg n$

n

H

$O \lg n$

BINOMIAL-MERGE

H

O

$O \lg n$

Добавление вершины

x

H

x

key x

BINOMIAL-HEAP-INSERT *H, x*

$H' \leftarrow \text{MAKE-BINOMIAL-HEAP}$

$p \ x \leftarrow \text{NIL}$

$child \ x \leftarrow \text{NIL}$

$sibling \ x \leftarrow \text{NIL}$

$degree \ x \leftarrow$

$head \ H' \leftarrow x$

$H \leftarrow \text{BINOMIAL-HEAP-UNION } H, H'$

O

H

x

$O \lg n$

H

n

удаление вершины с минимальным ключом

H

BINOMIAL-HEAP-EXTRACT-MIN H

H

x

x

$H' \leftarrow \text{MAKE-BINOMIAL-HEAP}$

x

$\text{head } H'$

$H \leftarrow \text{BINOMIAL-HEAP-UNION } H, H'$

return x

$O \lg n$

BINOMIAL-HEAP-EXTRACT-MIN

$O \log n$

уменьшение ключа

H

k

x

k

BINOMIAL-HEAP-DECREASE-KEY H, x, k

if $k > \text{key } x$

then error

$\text{key } x \leftarrow k$

$y \leftarrow x$

$z \leftarrow p \ y$

while $z \neq \text{NIL}$ and $\text{key } y < \text{key } z$

do $\text{key } y \leftarrow \text{key } z$

Рис. 20.7

BINOMIAL-HEAP-EXTRACT-MIN
 H . () x , H .
 $B_{k-1}, B_{k-2}, \dots, B_0$. ()
 x H' . ()

Рис. 20.8

BINOMIAL-HEAP-DECREASE-KEY. ()

()
 y z , y z . ()

 y z $key\ y$ $key\ z$ y y z

BINOMIAL-HEAP-DECREASE-KEY

 $O\lg n$ x $O\lg n$ **while**

KEY

MIN

BINOMIAL-F

BINOMIA

BINOMIA

HEAP-DELETE

$O \lg n$

Упражнения

20.2-1

20.2-2

20.2-3

20.2-4

20.2-5

20.2-6

20.2-7

20.2-8

BINOM

20.2-9

20.2-10

EXTRACT-MIN

BINOMIAL-HEAP-DECREASE-KEY

BINOMIAL-HEAP

HEAP-DELETE

 n

BINOMIAL

 $\Omega \lg n$

BINOMIAL

HEAP-INSERT

BINOMIAL-HEAP-MINIMUM

 $\Omega \lg n$ $\Omega \lg n$ **20-1 2-3-4-кучи****2-3-4-кучи**

heaps

 $O \lg n$ n

UNION

 $O \lg n$ n

MINIMUM

DECREASE-KEY

 x $k \leq \text{key } x$

INSERT

 x k

DELETE

 x

EXTRACT-MIN

UNION

20-2 Поиск минимального покрывающего дерева с использованием сливаемых куч

$$\begin{array}{llll} & G & V, E & a\ w\ E \rightarrow \\ \mathbb{R} & & & \\ u, v & w\ u, v & & \\ & G & & T \subseteq E \end{array}$$

$$w\ T \qquad \sum_{(u,v) \in T} w\ u, v$$

$$\begin{array}{llll} T & & V_i & V \\ & V_i & & \end{array}$$

$$E_i \subseteq \qquad u, v \qquad u \in V_i \qquad v \in V_i$$

$$V_i$$

MST-MERGEABLE-HEAP G

```

 $T \leftarrow \emptyset$ 
for  $v_i \in V\ G$ 
  do  $V_i \leftarrow v_i$ 
     $E_i \leftarrow v_i, v \in E\ G$ 
while
  do
     $V_i$ 
     $E_i$ 
     $u, v$ 
     $u \in V_i \quad v \in V_j$ 
    if  $i \neq j$ 
      then  $T \leftarrow T \cup u, v$ 
         $V_i \leftarrow V_i \cup V_j$ 
         $E_i \leftarrow E_i \cup E_j$ 
```

21

ФИБОНАЧЧЕВЫ КУЧИ

SEARCH

DELETE

DECREASE-KEY

21.1.

фибоначчиевой кучей Fibonacci heap

$p\ x$

$child\ x$

x

списком детей child list

x

Рис. 21.1 () , 5 14 .

3.
 $5 + 2 \cdot 3 = 11.$ ()
 $p (\quad)$, $child (\quad)$ $left$ $right (\quad)$.

y $left\ y$ $right\ y$
 $\qquad\qquad\qquad y$
 $\qquad\qquad\qquad left\ y$ $right\ y$ y

O
 O

$degree\ x$
 $mark\ x$
 $mark\ x$ x

$left$ $right$
корневым списком root list
 H

$min\ H$

МИНИМАЛЬНОЙ
вершиной minimum node

21.1. n H H $\min H$ NIL
 H

Потенциал

H m H t H

ΦH $t H$ $m H$.

.

O

Максимальная степень

D n

D
 n

D n $\lg n$

DECREASE-KEY DELETE D n $O \lg n$

21.2. ,

MAKE

HEAP INSERT MINIMUM EXTRACT-MIN UNION

Неупорядоченное биномиальное дерево unordered binomial tree

U_k

U_{k-1}

U_k

$U_0, U_1, \dots, U_{k-1}$

n

$D \leq n \leq \lg n$

EXTRACT-MIN

Создание новой фибоначчиевой кучи

MAKE-FIB-HEAP

H

$n \leftarrow H$ $min \leftarrow H$ NIL

$t \leftarrow H$ $m \leftarrow H$

MAKE-FIB-HEAP

O

Добавление вершины

H

x

x

$key\ x$

FIB-HEAP-INSERT H, x

$degree\ x \leftarrow$

$p\ x \leftarrow NIL$

$child\ x \leftarrow NIL$

$left\ x \leftarrow x$

$right\ x \leftarrow x$

$mark\ x \leftarrow FALSE$

x

if $min\ H = NIL$ **or** $key\ x < key\ min\ H$

then $min\ H \leftarrow x$

Рис. 21.2

. ()
21. (

,

x

BINOM

FIB-HEAP-INSERT

INSERT

O

O

Поиск минимальной вершины

$\min H$

O

O

Соединение двух фибоначчиевых куч

FIB-HEAP-UNION H_1, H_2

$H \leftarrow \text{MAKE-FIB-HEAP}$

$\min H \leftarrow \min H_1$

if $\min H_1 = \text{NIL}$ or $\min H_2 \neq \text{NIL}$ and $\min H_2 < \min H_1$

then $\min H \leftarrow \min H_2$

$n H \leftarrow n H_1 \cup n H_2$

return H

$H_1 \cup H_2$
 $\min H$
 $n H$
 $H_1 \cup H_2$

H

FIB-HEAP-INSERT

FIB-HEAP-UNION

O

Изъятие минимальной вершины

FIB-HEAP-EXTRACT-MIN H

$z \leftarrow \min H$

if $z \neq \text{NIL}$

then for

do

$p[x] \leftarrow \text{NIL}$

z

if $z \neq \text{right } z$

then $\min H \leftarrow$

else $\min H \leftarrow$

CONSOLIDATE

$n H \leftarrow n H - z$

return z

FIB-HEAP-EXT

SOLIDATE

z

$z \neq \text{NIL}$

z

z

$\min H$

z

$D \leftarrow H$
 i
 i

NIL

 A

 CONSOLIDATE H
for $i \leftarrow$ **to** $D \leftarrow H$
do $A[i] \leftarrow \text{NIL}$
for
 w
 H
do $x \leftarrow w$
 $d \leftarrow \text{degree } x$
while $A[d] \neq \text{NIL}$
do $y \leftarrow A[d]$
if $\text{key } x < \text{key } y$
then $x \leftrightarrow y$

 FIB-HEAP-LINK H, y, x
 $A[d] \leftarrow \text{NIL}$
 $d \leftarrow d - 1$
 $A[d] \leftarrow x$
 $\text{min } H \leftarrow \text{NIL}$
for $i \leftarrow$ **to** $D \leftarrow H$
do if $A[i] \neq \text{NIL}$
then $A[i]$
 H
if $\text{min } H = \text{NIL}$ or $\text{key } A[i] < \text{key } \text{min } H$
then $\text{min } H \leftarrow A[i]$

 FIB-HEAP-LINK H, y, x
 y
 H
 y
 x
 $\text{degree } x$
 $\text{mark } y \leftarrow \text{FALSE}$

CONSOLIDATE

 A

NIL

for

Рис. 21.3
H. ()

```

FIB-HEAP-EXTRACT-MIN. ( )
    z
    ;
    . ( ) ( )
    A
    for (
        3 13
        CONSOLIDATE).
        min H . ( )-( )
    ,
    for. . ( )
    while:
        23
        x.
        17
        7 ( ),
        24
        7 ( ).
        A 3
        for
        . ( )-( )
        while ( )

```

while w d degree x

FIB-HEAP-LINK

$O(D \cdot n)$

n

$O(D \cdot n)$

z

CONSOLIDATE

$O(D \cdot n)$

for

$O(D \cdot n)$

A

FIB-HEAP-LINK

$O(D \cdot n)$

!

Упражнения

21.2-1

FIB-HEAP-EXTRACT-MIN

21.2-2

'

U_k

k

$U_0, U_1, \dots, U_k$

21.2-3

n

$\lg n$

21.2-4

21.2-5

 O

21.3.

 O
 $O(D \cdot n) \quad n$
 $D \cdot n$
 $O \lg n$

FIB-HEAP-EXTRACT-MIN

FIB-HEAP-DELETE

 $O \lg n$

Уменьшение ключа

FIB-HEAP-

DECREASE-KEY

CUT

FIB-HEAP-DECREASE-KEY H, x, k
if $k < \text{key } x$
then error
 $\text{key } x \leftarrow k$
 $y \leftarrow p(x)$
if $y \neq \text{NIL}$ and $\text{key } x < \text{key } y$
then CUT H, x, y

CASCADING-CUT H, y
if $\text{key } x < \text{key } \min H$
then $\min H \leftarrow x$

CUT H, x, y

x

x

$p\ x \leftarrow \text{NIL}$

$\text{mark}\ x \leftarrow \text{FALSE}$

CASCADING-CUT

$z \leftarrow p\ y$

if $z \neq \text{NIL}$

then if $\text{mark}\ z$

then

else

Рис. 21.4

. ()
 ,
 35 5;
 ,
 ,
 ,
 ().

DECREASE-KEY

Удаление вершины

$$\begin{array}{ccc} \text{FIB-HEAP-DECREASE-KEY} & & O \\ \text{FIB-HEAP-EXTRACT-MIN} & & O \ D \ n \end{array}$$

Упражнения

21.3-1

$$\begin{array}{ccc} \text{21.3-2} & & O \\ \text{FIB-HEAP-DECREASE-KEY} & & \end{array}$$

21.4.

$$\begin{array}{ccc} & O \lg n & \\ \text{FIB-HEAP-EXTRACT-MIN} & \text{FIB-HEAP-DELETE} & \\ & D \ n & \end{array}$$

$$O \lg n \qquad n$$

$$\begin{array}{ccc} D \ n & \lg n & \\ \text{FIB-HEAP-DECREASE-KEY} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} D \ n & O \lg_2 n & \\ D \ n \leq \log_\varphi n & \varphi & \text{size } x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x & x & x \\ \text{size } x & & \text{degree } x \\ x & & \text{degree } x \end{array}$$

Лемма 21.1 x

$$, \dots, k-$$

$$k$$

$$k$$

□

$$k$$

$$k$$

$$F_k$$

$$\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} & F_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$$

Лемма 21.2.

$$F_{k+2} = \sum_{i=0}^k F_i$$

$$k$$

$$F_2 = k$$

$$\sum_{i=0}^0 F_i = F_0$$

$$F_{k+1} = \sum_{i=0}^{k-1} F_i$$

$$F_{k+2} = F_k + F_{k+1} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} F_i \right) + \sum_{i=0}^k F_i.$$

□

$$- \dots F_{k+2} \varphi^k \varphi$$

Лемма 21.3.

$$k \text{ size } x F_{k+2} \varphi^k, \varphi$$

x

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{size } x & F_2 & F_2 & F_3 & F_4 & \dots & F_k & & & & \\ & F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_k & & F_{k+2} & & & \\ & & & F_0 & F_1 & F_2 & & & & & \end{array}$$

Следствие 21.4.

$$\begin{array}{l} D \ n \\ n \\ O \lg n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} k \quad \text{degree } x \\ \varphi \\ n \quad \text{size } x \quad \varphi^k \end{array}$$

Упражнения

21.4-1

$$\begin{array}{l} n \\ O \lg n \end{array}$$

n

21.4-2

$$\begin{array}{l} k \\ k \\ D \ n \quad O \lg n \end{array}$$

21-1 Другой способ удаления элемента

FIB-HEAP-

DELETE

NEW-DELETE H, x

```

if  $x = \min H$ 
  then FIB-HEAP-EXTRACT-MIN  $H$ 
else  $y \leftarrow p(x)$ 
      if  $y = \text{NIL}$ 
        then CUT  $H, x, y$ 

```

a

O

NEW-DELETE

$x / \min H$

$\text{degree } x$

c

CASCADING-CUT

H'

NEW-DELETE H, x

x

H'

$\text{degree } x - c \leq t H$

$m H$

NEW-

DELETE

$x / \min H$

21-2 Дополнительные операции над фибоначчиевыми кучами

FIB-HEAP-

CHANGE-KEY H, x, k

x

k

k

$\text{key } x$

k

$\text{key } x$

$k \quad \text{key } x$

FIB-HEAP-

PRUNE H, r

$\min r, n H$

H



$$n$$

$$O \ m$$

$$m$$

$$m$$

$$O \ m$$

$$m$$

$$m$$

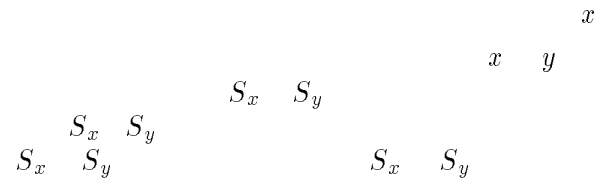
$$C \ m \ m$$

$$C \ m$$

$$C \ m$$

FIND-SET x

UNION x, y



MAKE-SET

UNION MAKE-SET FIND-SET

CONNECTED-COMPONENTS

SAME-COMPONENT

off line

on line

$E \ G \ V \ G$
 G

```

Connected Components G
  for      v in V G
    do Make Set v
  for      u v    in E G
    do if Find Set u ne Find Set v
       then Union u v

```

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b, d	a	b, d	c		e	f	g	h	i	j
e, g	a	b, d	c		e, g	f		h	i	j
a, c	a, c	b, d			e, g	f		h	i	j
h, i	a, c	b, d			e, g	f		h, i		j
a, b	a, b, c, d				e, g	f		h, i		j
e, f	a, b, c, d				e, f, g			h, i		j
b, c	a, b, c, d				e, f, g			h, i		j

Рис. 22.1 22.1) ,

$\{e, f, g\}, \{h, i\}, \{j\}, \dots$

$: \{a, b, c, d\},$

d, f, g f b, c, e, h c

f UNION e, g

22.2.

a

FIND-SET O MAKE-SET MAKE-SET FIND-SET

x UNION x, y UNION y b

y
 x

$x_1, x_2, \dots, x_n$ $n - i$ n
 $, \dots, n$ UNION x_1, x_2 UNION x_2, x_3 ...
UNION x_{i-1}, x_i UNION x_i, x_{i+1} ...

MAKE-SET x_1

MAKE-SET x_2

MAKE-SET x_n

UNION x_1, x_2

UNION x_2, x_3

UNION x_3, x_4

UNION x_{n-1}, x_n $n -$

Рис. 22.2 22.3

x x x x n $\lg n$ n $O\ n \lg n$ $O\ m \quad O\ n \lg n$

MAKE-SET FIND-SET UNION

 x $rep\ x$ $last\ x$ $size\ x$

FIND-SET

```

for i gets to
do Make Set x i
for i gets to by
do Union x i x i
for i gets to by
do Union x i x i
Union x x
Union x x
Union x x
Find Set x
Find Set x

```

MAKE-SET FIND-SET
UNION O
 $O\ \lg n$

рис. 22.4

Find-Set(a).

.

Find-Set.)

Find-Set(a).

22.2.1. Программы

x

FIND-SET

 x

FIND-S

 x x $O\ m\lg n\ -\ m$ n

MAKE-SET

 n MAKE-SET f $\Theta\ f\log_{1+f}\ n\ n\ f\ n\ \Theta\ n\ .$ $f\ n\ ,$ $O\ m\alpha\ m,n\ \alpha$ $\alpha\ m,n$

рис. 22.5 22.6. $A(i, j)$ i j .

row column

рис. 22.6 . 22.7. . (. 22.6)
(-
).

n

MAKE-SET

$$\Theta\left(\frac{m}{n}\alpha\left(\frac{m}{n},n\right)\right)=\alpha\left(\frac{m}{n},n\right)\frac{m}{n}\qquad\text{MAK}$$

$$\alpha\left(\frac{m}{n},n\right)\leqslant$$

$$A\left(\frac{m}{n}\right),\quad A\left(\frac{m}{n}\right),\quad A\left(\frac{m}{n}\right),\quad \left.2^{\frac{m}{n}}\right\},$$

$$\approx \frac{80}{n}A\left(\frac{m}{n}\right)\lg n-\alpha\left(\frac{m}{n},n\right)\leqslant$$

$$\lg^*n\leqslant O\left(\frac{m}{n}\lg^*n\right)\lg^*$$

$$\lg^*n=\min\left\{i\mid \underbrace{\lg\lg\ldots\lg}_i n\leqslant\right\}$$

$$n\leqslant \lg^*$$

$$n\leqslant \left.2^{\frac{m}{n}}\right\}j-j$$

$$O\left(\frac{m}{n}\lg^*n\right)$$

$$O\left(\frac{m}{n}\alpha\left(\frac{m}{n},n\right)\right)$$

$$\lg^*\frac{65536}{n}$$

$$\lg^*\frac{n}{65536}\leqslant$$

$$\lg^*$$

MAKE-SET, UNION FIND-SET

x x x size

size x

x size x $rank\ x$

MAKE-SET LINK MAKE-SET

x x size x

FIND-SET

MAKE-SET x

LINK x, y
 $rank\ x \leq rank\ y$

y

x $rank\ y$ y

size y $rank\ y$

$rank\ x$ $rank\ y$ size' y rank' y

y LINK size' y size x size y

' y rank y

LINK UNION
 m_1 MAKE-SET FIND
 UNION
 LINK S_1
 FIND-SET LINK
 $O \ m_2 \lg^* n$
 S_1 $O \ m_1 \lg$
 MAKE-SET
 m
 SET LINK n
 $O \ m \lg^* n$
 O MA
 FIND-SET
 SET x

$$\beta^k$$

$$k$$

$$\beta^k \quad k$$

$$k$$

$$u$$

$$\operatorname{rank} v$$

$$\beta^{\operatorname{rank} u}$$

$$v$$

$$O(m)$$

$$k$$

$$k$$

$$\beta^k$$

$$k$$

$$\sum_k \frac{n\beta^k}{k}$$

$$\beta$$

$$\sum \beta^k \quad k$$

$$O(n)$$

$$\beta$$

$$\lg n$$

$$\beta$$

$$\beta^k \quad k$$

$$n$$

$$,^k$$

$$\sum ,^k \quad k$$

$$\leq \sum_{\beta} ,^k \quad k$$

$$k \mapsto k$$

$$O(\lg^* n)$$

$$O(m \lg^* n)$$

$$\text{MAKE-SET}$$

$$, \quad , \quad , \quad , \quad \beta \cdot k, \dots \quad k$$

$$\sum \beta \cdot k \quad k \quad \lg^* n$$

$$\text{UNION } n \quad \text{MAKE-SET } m \quad \text{MAKE-SET}$$

$$\text{MAKE-SET} \quad \text{FIND-SET}$$

SERT x EXTRACT-MIN $extracted \dots m$
 $extracted \ i$ i
 EXTRACT-MIN
 off line

on line

E		EXTRACT-MIN	i		INSERT	i
	,	,E,	,E,	, ,	,E,E,E,	, ,E,
						.

extracted

off line

S

$$I_1, E, I_2, E, I_3, \dots, I_m, E, I_{m+1},$$

E	EXTRACT-MIN	I _j
	INSERT	

$$T \begin{matrix} I_j \\ K_j \end{matrix}$$
$$T$$

INSERT

$$\mathbf{I}_j$$

Off Line Minimum m n

```
for i gets to n
```

$$\text{do } \sum_j \sum_i \text{ in } K_j$$

```
if j ne m
```

then extracted j gets i

1 gets \$j\$

\$K 1\$

$$K_l \text{ gets } K_l \text{ cup } K_j \qquad \$K_j\$$$

```

return extracted

```

OFF-LINE-MINIMUM

extracted

OFF-LINE-MINIMUM

depth determination problem

 $\mathcal{F}$ T_i MAKE-TREE v ν

FIND-DEPTH v
 v
GRAFT r, v r
 v r
 v v r
 $p\ v$ $p\ v$ v v
 $p\ v$ $p\ r \leftarrow v$ GRAFT r, v
MAKE-TREE
FIND-
DEPTH v v
 m MAKE-TREE,
GRAFT FIND-DEPTH $\Theta\ m^2$

MAKE-TREE
FIND-DEPTH

GRAFT
UNION LINK

MAKE-TREE, GRAFT FIND-DEPTH n m
MAKE-TREE

off line
least common ancestor
LCA $u\ v$ T
 $u\ v$
off-line off line least common ancestors problem
 T
 P
 $u, v \in P$
LCA
 $u, v \in P$
LCA *root* T

```

Find Set u      gets u
            $v$           " a           $u$

v
on u v
estor Find Set u      gets u
u      " a
            v           $ u v   in P$
            v      " a
n print                               $u$
                                ancestor Find Set v

```

$$u, v \in P$$

LCA *root* T

LCA u

T

LCA *корень* T

$$u, v \in P$$

LCA

$$O\ m\alpha\ m, n$$

23

АЛГОРИТМЫ на графах

23.1.

23.1.1. Представление графов

Рис. 23.1 23.1

G 5

.

Рис. 23.2 23.2

G 6

.

v

v

$O \max V, E$ $O V$

weighted graphs

W

function $w: E \rightarrow \mathbb{R}$

u, v

v

NIL

∞

v, u

E

sink

G

$(- ,$

b_{ij} $,$

$($

$\mathcal{V}$

```

graph TD
    subgraph BFS [BFS breadth first search]
        G --> V_E["V, E"]
        V_E --> u
        u --> pi_u["π u"]
        pi_u --> u_s_u["u s u"]
        u_s_u --> s_u["s u"]
        s_u --> Q_FIFO["Q FIFO"]
    end
    pi_u --> u_s_u
    u_s_u --> s_u
    s_u --> Q_FIFO
    Q_FIFO --> d_u["d u"]
    d_u --> pi_u
    pi_u --> NIL
    NIL --> d_u
    color_u["color u"]

```

BFS\$ G s \$

```

for
do $color u leftarrow$
  $d u leftarrow infity$
  $ pi u leftarrow$ NIL
$color s leftarrow$
$d s leftarrow $
$ pi s leftarrow$ NILL
$Q leftarrow s $
while $Q ne emptyset$
do $u leftarrow head Q $
  for
    $v in Adj u $
    do if $color v $
      then $color v leftarrow$
        $d v leftarrow d u $
        $ pi v leftarrow u$
        Enqueue $Q v$
  Dequeue $Q$
  $color u leftarrow$

```

" a

```
textsc BFS
```



textsc BFS

$\$G\$$

$\$s\$$

$\$G \ V \ E \ \$$

emph

shortest path distance $\$ \delta \ s \ v \ \$$

$\$s\$ \ \$v\$$

" a

" a

$\$ \delta \ s \ v \ \$ \ \$s\$ \ \$v\$$

emph

" a

" a

" a

$\$s\$$

$\$ \ u \ v \ \$$

$\$ \delta \ s \ v \ le \ \delta$

s u $\$s\$$

$\$u\$$

$\$k\$$

$\$s\$$

$\$v\$$

$\$k \ \$$

" a

$\$ \ u \ v \ \$$

$\$u\$$

$\$s\$$

$\$ \delta \ s \ u \ \infty \ \$$

$\$ \delta \ \$s\$ \ \$v\$ \ \$$

$\$u\$$

$\$ \delta \ s \ v \ \delta \ s \ u \ \$$

$\$v\$$



\$k\$

\$k\$

\$k\$

\$d\$

\$ pi\$

textsc nil

\$d\$ \$ pi\$

\$k\$

" a

textit

emph

\$k\$

" a

" a

" a

\$k\$

\$k\$

\$k\$

\$k\$

\$k\$

\$k\$

\$k\$

\$v\$

\$k\$

\$u\$

\$k\$

\$u\$

" a

\$v\$

\$u\$

\$v\$

" a





$$s \in V$$

$$s \rightarrow v$$

C

BFS

diameter

1

max
 $u, v \in$

$$G = (V, E)$$

subgraph $G_\pi \quad V, E_\pi$ predecessor

$$E_\pi \quad \pi(v), v \quad v \in V \text{ and } \pi(v) \neq \text{NIL}$$

depth first forest
deep first trees

discovered

timestamps

$$d(v) \quad f(v)$$

v

DFS Depth First Search

$$V \quad d(v) \quad f(v) \quad u \quad d(u) \quad f(u) \quad u \quad d(u) \quad f(u) \quad time$$

DFS G

```
for  $u$  in  $V(G)$ 
  hspace 1cm do  $\text{color}(u) \leftarrow$ 
  hspace 1cm  $\pi(u) \leftarrow \text{NIL}$ 
 $\text{time} \leftarrow$ 
  for  $u$  in  $V(G)$ 
    hspace 1cm do if  $\text{color}(u) =$ 
    hspace 1cm then DFS Visit  $u$ 
```

DFS Visit u
 $\text{color}(u) \leftarrow$ u

Рис. 23.3 23.4

)

C (c

```
$d u \leftarrow time
textsc for
hspace cm textsc
hspace cm textsc
hspace cm DFS Vis
$color u \leftarrow$
$f u \leftarrow time
```

NIL

DFS

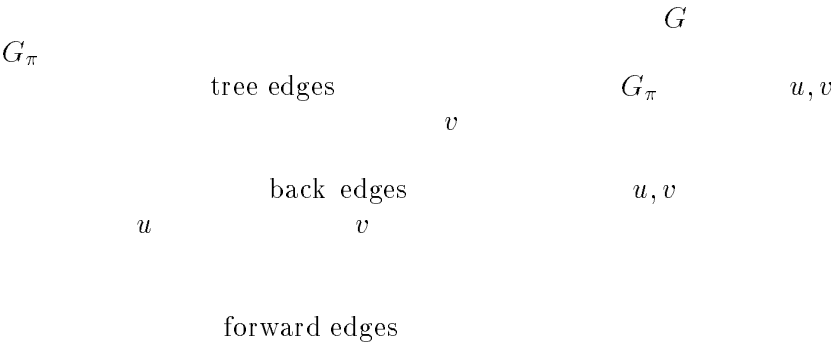
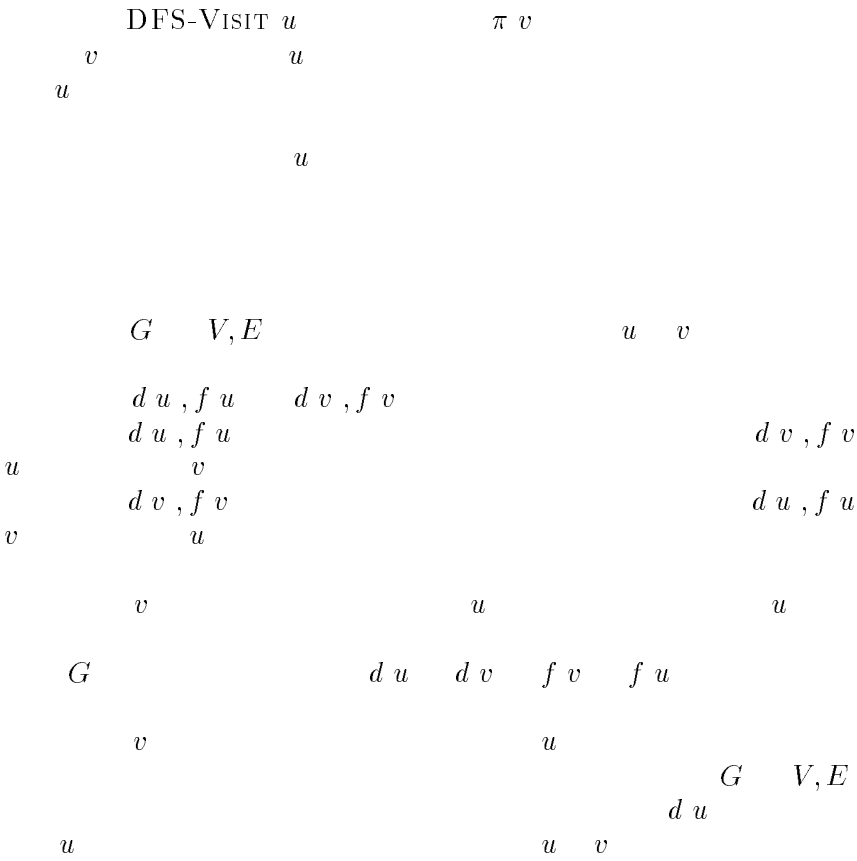
d u

u

DFS

DFS-VISIT

Σ



cross edges

c

a

DFS

u, v

v

DFS-VISIT v

v

d

u, v

$d\ u$

$d\ v$

$d\ u$

$d\ v$

u, v

v, u

G

G

u, v

$d\ u$

$d\ v$

v

u

u

v

u, v

u

v

u, v

v

u

u

$\times$

i, j

		undershorts	pants	belt
shirt		tie	jacket	socks
shoes		watch		

Рис. 23.6 23.7 (a)

(u, v) , u v .
 . (b)
 (

v

$G = V, E$
 is singly connected

DFS \$\$\$

textsc DFS Visit

" a

b
 $f\ v$

$\Theta\ V\ E$

V

O

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

c

v

$d\ v\ \begin{matrix} u, v \\ v\ u \end{matrix}$
 u

v

u, v

TOPOLOGICAL-SORT G

G

$f\ v\ \ f\ u$

u, v

v
 u

u, v

v

v

$f\ v\ \begin{matrix} u \\ f\ u \end{matrix}\ \ f\ v\ \ f\ u$

TOPOLOGICAL-SORT

TOPOLOGICAL-SORT

Рис. 23.7 23.9 (a) G
(G^T). (b)
3 STRONGLY-CONNECTED
COMPONENTS $b, c, g, h,$
(G^T), (c)
, G .

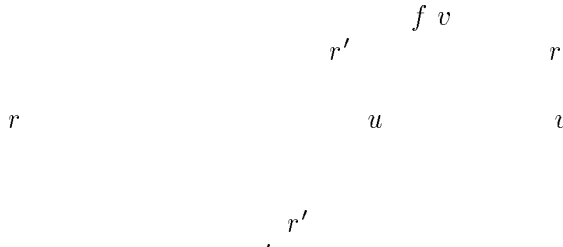
$O \ V \ \ \ \ \ \ G \ \ \ \ \ \ V, E \ \ \ \ \ \ E$

TOPOLOGICAL-SORT

$O \ V \ \ \ \ \ \ E$







STRO

DFS

 G component graph G^S
 V^{SCC} u, v v





n $n -$

V E $G = (V, E)$
 $w(u, v)$ u, v
 u v
 $T \subset E,$

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in T} w(u,v)$$

Рис. 24.1 24.1

37). : (b, c) (a, h) , 37.

—

o

$$O(E \lg V)$$

$$O(E + V \lg V)$$

$$E \lg V \qquad V \qquad E$$

$$G = V, E$$

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Ис. 24.2 24.2
 а)

S , $V \setminus S$
 (d, c) .
 $(S, V \setminus S)$
 A (A $V \setminus S$). (b) S

Рис. 24.3 24.3 (

24.1). S

$V \setminus S$
 T).

A
 $(S, V \setminus S); (x, y)$

$; (u, v)$

p u v

T .

u, v

A .

T

A

T

u, v ,

T'

u, v

T

p u v

u v

$S, V \setminus S$

p

x, y

A

T

A
 x, y

u, v

T' T

x, y

u, v .

T'

u, v

$S, V \setminus S$

T

x, y

u, v

T

G V, E
 E w A
 E
 G S, V S G S, V S
 u, v A
 u, v

u, v

e

G
 T

V T' G V, E V'
 G T V' T

EXTRACT-MIN $O \lg V$, DECREASE-
KEY O

$$O \ E \ V \lg V$$

$$G$$

$$G \qquad \qquad \qquad G \qquad \qquad \qquad T$$
$$T.$$

$$V,E \qquad \qquad \qquad O \ V^2 \ .$$

$$E \quad \Theta \ V \qquad \qquad \qquad E \quad V \qquad \qquad \qquad \begin{matrix} G \\ E \end{matrix} \quad \begin{matrix} V,E \\ \Theta \ V^2 \end{matrix}$$

$$V \qquad \qquad \qquad G \quad V,E \qquad \qquad \qquad W \quad W$$

$$V \qquad \qquad \qquad G \quad V,E \qquad \qquad \qquad W \quad W$$

$$G \qquad \qquad \qquad w$$

,

$$G \qquad \qquad \qquad G$$

$$G \quad V, E \\ w \quad E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{a} \quad T$$

$$\text{b} \quad T \quad u, v \in T \\ u, v \in V \quad \max u, v$$

$$\text{c} \quad T \quad \max u, v \quad O \, V^2$$

$$O \, E \quad V \lg V$$

MST-REDUCE

```

                                textsc
leftarrow      textsc Find Set v      v in V G
leftarrow emptyset$
$ x y  in E G $
do  $u \rightarrow \text{textsc Find Set } x $
    $v \rightarrow \text{textsc Find Set } y $
    bf if $ u v \notin E G $
        bf then $E G \rightarrow E G \cup
                $orig u v \rightarrow orig
                $w u v \rightarrow w x y $
        bf else if $w x y \rightarrow w u v $
        bf then $orig u v \rightarrow orig
                $w u v \rightarrow w x y $
                $Adj$      $G $
return $G $      $T$

```

MST.

$$\begin{array}{c}
 G' \\
 T \quad orig\ x, y \quad x, y \in T' \\
 G.
 \end{array}$$

$$\beta(E, V) = \min_i \lg^{(i)} V \leq E - V$$

Кратчайшие пути из одной вершины

shortest paths problem

$G = (V, E)$

weight $p = v_0, v_1, \dots, v_k$

$w : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$w(p) = \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

single source shortest
 $G = (V, E)$
 s

Кратчайшие пути в одну вершину:

destination vertex

$v \in V$

Кратчайший путь между данной парой вершин

u

v

u

Кратчайшие пути для всех пар вершин:

рис. 25.1 25.1

e f

s

$-\infty$.

$-\infty$.

h, i j

g ,

s ,

(

g

∞

Рис. 25.2 25.2 () ;
 s . ()
 s . ()

$$G = (V, E) \\ w : E \rightarrow \mathbb{R}$$

G

s

shorted paths tree
 $G' = (V', E') \quad V' \subseteq V \quad E' \subseteq E$
 V'
 G' s

$$\begin{array}{c} G \quad V, E \\ w \quad E \rightarrow \mathbb{R} \\ v_1 \quad v_k \quad \leq i \leq j \leq k \quad p \quad v_1, v_2, \dots, v_k \\ \quad \quad \quad v_i \quad v_j \quad p_{ij} \quad v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \\ \\ p_{ij} \quad p \\ v_i \quad v_j \quad v_i \quad v_j \\ p_1 \quad p_k \\ \\ G \quad V, E \\ w \quad E \rightarrow \mathbf{R} \\ v \quad u \rightarrow v \quad p \quad s \xrightarrow{p'} u \rightarrow v \\ \delta_{s,v} \quad \delta_{s,u} \quad w \quad u, v \\ \\ p' \quad \delta_{s,v} \end{array}$$

Рис. 25.3 25.3 (u, v) .

$\cdot ()$
 $d \ v$

$\cdot ()$

$m \ E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{R} \quad \quad \quad \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subset E$$

$$u,v$$
$$u,v$$
$$u,v$$
$$u,v$$
$$u,v$$
$$d\,v\leqslant d\,u-w\,u,v-\delta\,s,u-w\,u,v-\delta\,s,v$$
$$d\,v-\delta\,s,v$$
$$d\,v-\delta\,s,v$$
$$G_\pi$$
$$G-\frac{V,E}{w}$$
$$s$$
$$s$$
$$G$$
$$\text{INITIALIZE-SINGLE-SOURCE } G,s$$
$$G_\pi$$
$$s$$
$$V$$
$$\pi\,v\text{ / NIL}$$
$$v$$
$$G_\pi$$
$$v\in$$
$$d\,v$$
$$d\,v$$
$$\pi\,v$$
$$G_\pi$$
$$\pi\,v$$
$$G$$
$$G_\pi$$
$$u,v$$
$$d\,v$$
$$x,y$$
$$d\,y$$
$$u$$
$$G_\pi$$
$$\pi\,v$$
$$G_\pi$$
$$u,v$$
$$d\,v$$

$$\begin{array}{c}
V \ G_\pi \\
s \qquad G_\pi \\
s \qquad G \qquad G_\pi \qquad s \\
G \\
G_\pi \qquad s \\
v \ / \ s \\
G \qquad G_\pi \\
d \ v \quad \delta \ s, v \quad \infty \\
v \quad \pi \ v \ / \ \text{NIL} \qquad v \in V \ G_\pi \\
s \qquad v \qquad G_\pi \qquad d \ v - d \ s \\
d \ v \quad \delta \ s, v \\
G \quad V, E \\
s \\
u, v \in E \\
s \qquad u, v \\
s \\
\infty \qquad -\infty \\
G \quad V, E \\
s \\
\text{INITIALIZE-SINGLE-SOURCE } G, s \\
\pi \ s \ / \ \text{NIL} \\
G \\
G \quad V, E \\
s \in V \qquad v \in V \quad s \qquad \pi \ v \in V \\
\pi \ v \quad \text{NIL} \qquad s \quad v \qquad v \quad G \qquad \pi \quad s \\
\qquad \qquad \qquad \pi \qquad G_\pi \\
\pi \\
G \quad V, E \\
s \\
s \qquad \text{INITIALIZE-SINGLE-SOURCE } G, s \\
v \in V \ G_\pi \\
s \qquad G_\pi \quad V, E
\end{array}$$

Ис. 25.5 . 25.5. .

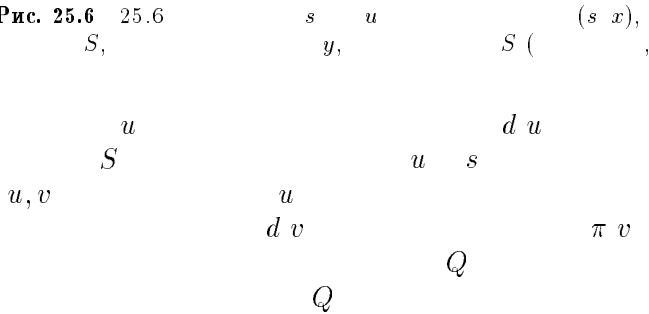
$u, v)$, $\pi v = u$, S ,
 $Q = V \setminus S$. () **while.**

d

$E ()$

u
while

Рис. 25.6 25.6



while

$$G = V, E$$

$$w \in E \setminus \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
& y & u & & s & y & & S \\
& & & & & & d & y \\
a & & & & & & & \\
& & & & & & d & y \leq d & u \\
Q & & u & & & & d & u \\
& & & a & & & & u & S \\
& & & & b & & S & & \\
& S' & S & u & & & S & & \\
& & & & & & b & & d & v \\
v \in Q & & & & & & & & & \\
& & u, v & & & d & v & & & \\
& & & & & & & & & \\
& & d' & v & \min & d & v, d & u & w & u, v & . \\
& & & & & & & & & \\
& & d & v & & & & & & \\
v & & & & S & & & d & u & w & u, v & \\
& & & & & & s & u & & & \\
& & S & & & & u, v & & & & \\
& & & s & v & & & & & & \\
& d' & v & & & & p & s & v & & \\
& & & & S' & & & d' & v & &
\end{array}
\end{array}$$

modified Dijkstra algorithm

$O(V)$

DECREASE-KEY $Q, v, d[u] \leftarrow w(u, v)$

E

$O(V + E \lg V)$

$O(E \lg V)$

Q

MIN $O(\lg V)$

DECREASE-KEY O

DECREASE

DECREASE

s

while Q

while

Рис. 25.7 25.7

(z).

$$(u, v), \quad \pi v = u.$$

$$2 \ 4$$

$$: (u, v), (u, x), (u, y), (v, u), (x, v), (x, y), (y, v), (y, z), (z, u), (z, x).$$

$$(\quad)$$

$$d$$

$$(\quad)$$

TRUE.

$$s$$

$$O \ VE$$

$$O \ VE$$

$$O \ V$$

$$O$$

$$G \quad V, E$$

$$w$$

$$s$$

$$s$$

BELLMAN-FORD

$$d \ v$$

$$\delta \ s, v$$

$$v$$

$$s$$

$$p$$

$$s$$

$$v_0, v_1, \dots, v_k$$

$$v$$

$$s$$

$$v$$

$$k \leqslant V -$$

$$i$$

$$i$$

$$d \ v_i \quad \delta \ s,$$

$$V -$$

$$i$$

$$d \ s$$

$$\delta \ s, s$$

$$i -$$

$$d \ v_{i-1}$$

$$\delta \ s, v_i$$

$$i$$

$$v_{i-1} \ v_i$$

TRUE

$$v \in V$$

$$G_\pi$$

$$s$$

BELLMAN-FORD

FALSE

$$s$$

$$s$$

FORD

$$d(v)$$

$$\delta(s, v)$$

$$v \in V$$

$$G_\pi$$

$$s$$

$$v \in V$$

$$d(v) \leq d(u) + w(u, v)$$

TRUE

$$v_0$$

$$i-1$$

$$w(v_{i-1}, v_i)$$

FALSE

$$i, \dots, k$$

$$\sum d(v_i)$$

$$i-1, v_i$$

$$i$$

$$d(v_i)$$

$$d(v_{i-1})$$

$$w(v_{i-1}, v_i)$$

FALSE

$$y$$

$$y, v$$

$$z$$

$$m$$

$$u, v \in V$$

$$v$$

$$u \rightarrow v$$

$$m$$

$$m$$

$$v$$

$$\delta(s, v)$$

$$-\infty$$

$$d(v)$$

$$\delta(s, v)$$

$$G(V, E)$$

$$O(V E)$$

$$v \in V$$

$$\delta^*(v)$$

$$\min_{u \in V} \delta(u, v)$$

$$G = (V, E)$$

25.3.

$$G = (V, E)$$
$$O(V + E)$$

Dag Shortest Paths G, w, s

G

Initialize Single Source G, s

for u

do for v in Adj u

do Relax u, v, w

DAG-SHORTEST-PATHS

$$\Theta(V + E)$$

$$O(V)$$

O

$$\Theta(V + E)$$

v

u

feasible solution

$$Ax \leqslant b$$

system of difference con

straints

$$Ax \leqslant b$$

$$A$$

–

$$x_i - x_j \leqslant b_k,$$

$$1 \leqslant i, j \leqslant n \qquad 1 \leqslant k \leqslant m$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\begin{pmatrix} - & & & - & \\ & - & & - & \\ - & & & & \\ - & & & & \\ & - & & & \\ & - & & & \\ & & - & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leqslant -1, \\ x_1 - x_5 &\leqslant -1, \\ x_2 - x_5 &\leqslant -1, \\ x_3 - x_1 &\leqslant -1, \\ x_4 - x_1 &\leqslant -1, \\ x_4 - x_3 &\leqslant -1, \\ x_5 - x_3 &\leqslant -1, \\ x_5 - x_4 &\leqslant -1. \end{aligned}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

x

Рис. 25.9

v_i

$$\delta(v_0, v_i).$$

(25.4).

(25

$$x = (-5, -3, 0, -1, -$$

x

$x_1, \dots, x_n$







$$u,v \qquad w_{i-1} \; u,v \qquad \qquad \qquad \delta_i \qquad \delta_{i-1} \qquad \qquad \qquad i \qquad , \qquad , \dots, k \qquad w_i \; u,v \qquad w_{i-1} \; u,v$$

$$\delta_{i-1} \; u,v \; \leqslant \delta_i \; u,v \; \leqslant \; \delta_{i-1} \; u,v \qquad V \; -$$

$$v \in V \qquad i \qquad , \qquad , \dots, k \qquad u,v \in E$$

$$w_i \; u,v \qquad w_i \; u,v \qquad \delta_{i-1} \; s,u \; - \; \delta_{i-1} \; s,v \; .$$

$$w_i \; u,v \qquad \delta_i \; s,v \qquad w_i$$

$$\delta_i \; s,v \qquad \delta_i \; s,v \qquad \delta_{i-1} \; s,v$$

$$s,v \; \leqslant \; E$$

$$\qquad \qquad \qquad O \; E \qquad \delta_{i-1} \; s,v \qquad \delta \; s,v \qquad v \in V \qquad \operatorname{E} \lg W$$

$$G \qquad V,E \qquad \mathbb{R} \qquad n \qquad V \qquad \qquad \qquad \text{mean weight} \qquad e_2,\dots,e_k \qquad e_j$$

$$\mu \; c \qquad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k w \; e_i \; .$$

$$\min_c \mu \; c \qquad c$$

$\mathcal{K}$

$$\qquad \qquad \qquad s \qquad \delta \; s,v \qquad s \; v \qquad \delta_k \; s,v \qquad k$$

$$\delta_k \; s,v \qquad \infty \qquad \mu^* \qquad G \qquad \delta \; s,v \qquad \min_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \delta_k \; s,v \qquad v \in V \qquad \mu^*$$

$$\max_{0 \leqslant l \leqslant 1} \frac{\delta_n \; s,v \; - \delta_k \; s,v}{n - k}$$



Кратчайшие пути для всех пар вершин

$$w: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G = (V, E)$$



$$m$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} i & j \\ i & / \ j \end{array} \right.$$

$$d_{ij}^{(m)}$$

$$d_{ij}^{(m-1)}$$

$$i$$

$$k,j$$

$$-1), \min_{1 \leqslant k \leqslant n} d_{ik}^{(m-1)} \quad w_{kj}$$

$$\min_{\leqslant n} d_{ik}^{(m-1)} \quad w_{kj}$$

$$w_{jj}$$

$$-1) \quad d_{ij}^{(n)} \quad d_{ij}^{(n+1)} \quad \dots \quad .$$

$$\begin{array}{ccccc} W & w_{ij} & & & \\ D^{(2)}, \dots, D^{(n-1)} & & D^{(m)} & d_{ij}^{(m)} & \\ D^{(n-1)} & & & & \\ & D^{(1)} & & & \end{array}$$

$$D^{(m)} \quad D^{(m-1)} \quad W$$

hs \$ D W \$
 ows D \$
 ij \$ \$n times n\$
 ow \$ to \$n\$
 leftarrow \$ to \$n\$
 d ij leftarrow infty\$
 or \$k leftarrow \$ to \$n\$
 do \$d ij leftarrow min d

$$D'$$

$$n \times n$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

```

sc Matrix Multiply $ A B $
verb    $n leftarrow rows A $
verb    $C c ij $      $n times n$
verb    for $i leftarrow $ to $n$
verb    do for $j leftarrow $ to $n$
verb    do $c ij leftarrow $
verb    for $k leftarrow $ to $
verb    do $c ij leftarrow
b kj $
verb    return $C$

```

$$\begin{aligned}
 d^{(m-1)} &\rightarrow a, \\
 w &\rightarrow b, \\
 d^{(m)} &\rightarrow c, \\
 \min &\rightarrow , \\
 &\rightarrow .
 \end{aligned}$$

$$\min \qquad \qquad \qquad \infty \qquad \qquad \qquad \min \infty, a \qquad \qquad a$$

$$a \quad a$$

$$n - \qquad \qquad \qquad W$$

$$\begin{array}{lll}
 D^{(1)} & D^{(0)} \cdot W & W \\
 D^{(2)} & D^{(1)} \cdot W & W^2 \\
 D^{(3)} & D^{(2)} \cdot W & W^3
 \end{array}$$

$$D^{(n-1)} \qquad D^{(n-2)} \cdot W \qquad W^{n-1}$$

$$D^{(1)} \begin{pmatrix} & & & \infty & - \\ \infty & & \infty & & \\ \infty & & & \infty & \infty \\ & \infty & - & & \infty \\ \infty & \infty & \infty & & \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)} \begin{pmatrix} & & & & - \\ & & & - & \\ \infty & & & & \\ & - & - & & - \\ & \infty & & & \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} \begin{pmatrix} & & & - & - \\ & & & - & \\ & & & - & \\ & - & - & & - \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)} \begin{pmatrix} & & & & - \\ & & & - & \\ & & & - & \\ & & & - & \\ - & - & & & - \end{pmatrix}$$

ис. 26.1

26.1

$$D^{(5)} = D^{(4)} \cdot W \left(\begin{matrix} G \\ \end{matrix} \right),$$

$$D^{(m)}$$

```
verb    $D      leftarrow W$
verb    for $m leftarrow $ to $n $
verb      do $D   m      leftarrow mbox sc Extend Short
$
verb    return $D   n     $
```

$D^{(m)}$

$$D^{(n-1)}$$

$$D^{(m)}$$

$$a$$

$$a$$

, , , ...

$\lg n -$

$D^{(n-1)}$

$$\mathcal{O}^{(1)} \qquad W$$

$$\mathcal{O}^{(2)} \qquad W^2 \qquad W \cdot W$$

$$\mathcal{O}^{(4)} \qquad W^4 \qquad W^2 \cdot W^2$$

$$\mathcal{O}^{(8)} \qquad W^8 \qquad W^4 \cdot W^4$$

Рис. 26.2 26.2
1, 26.2-1 26.3-1.

```

verb      $n  leftarrow rows
verb      $D           leftarrow
verb      $m  leftarrow $
verb      while $n      m$
verb              do $D      m
D      m      $
verb              $m  lefta
verb      return $D      m  $

```

while

$$O~n^3$$

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{ij}^{(m)} & & i & j & & & m \\ & & \text{EXTEND-SHORTEST-PATHS} & & \text{SLOW-ALL-PAIRS} & & \\ \text{SHORTEST-PATHS} & & & & & & D^{(1)}~D^{(2)}~\dots \\ D^{(n-1)} & & \Pi^{(1)}~\Pi^{(2)}~\dots~\Pi^{(n-1)} & & & & \\ & & \text{FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS} & & & & \\ & & \lg~n - & & & & \\ n \times n & & & & & & \Theta~n^2 \lg n \\ & & & & & & \\ n \times n & & & & \Theta~n^2 & & \\ & & & & \text{FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS} & & \end{array}$$

26.1. -

$$\Theta~V^3$$

intermediate

$$p \qquad v_1,v_2,\ldots v_l$$

$$\begin{aligned}
 & \qquad \qquad \qquad k \\
 & \qquad \qquad \qquad p \\
 & \qquad \qquad \qquad k \\
 & \qquad \qquad \qquad p \\
 & \qquad \qquad \qquad i \quad j \quad , \quad , \dots , k - \\
 & \qquad \qquad \qquad , \quad , \dots , k - \\
 & \qquad \qquad \qquad k \\
 & \qquad \qquad \qquad p_1 \quad p_2 \qquad \qquad \qquad k \\
 & \qquad \qquad \qquad p \\
 & \qquad \qquad \qquad i \quad k \\
 & \qquad \qquad \qquad , \quad , \dots , k - \qquad \qquad \qquad p_2 \\
 & \qquad \qquad \qquad k \quad j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \qquad \qquad \qquad i \qquad \qquad \qquad j \\
 & \qquad \qquad \qquad , \quad , \dots , k \qquad \qquad \qquad k \\
 & \qquad \qquad \qquad d_{ij}^{(0)} \qquad w_{ij} \qquad \qquad \qquad d_{ij}^{(k)}
 \end{aligned}$$

$$d^{(k)} = \int w_{ij} \quad (l-1) \quad (l-1) \quad (l-1)$$

$$\begin{array}{c}
D^{(0)} \\
D^{(1)} \\
D^{(2)} \\
D^{(3)} \\
D^{(4)} \\
D^{(5)}
\end{array}
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccc}
\infty & & \infty & \infty \\
\infty & & & \infty \\
& \infty & - & \infty \\
\infty & \infty & \infty &
\end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc}
& & & \infty \\
\infty & & \infty & - \\
\infty & & & \infty \\
& \infty & - & - \\
\infty & \infty & \infty &
\end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc}
& & \infty & - \\
\infty & & & - \\
& \infty & - & - \\
\infty & \infty & \infty &
\end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc}
& & & - \\
& & \infty & - \\
& - & - & - \\
& \infty & & - \\
& & - & - \\
& & - & - \\
& - & - & -
\end{array} \right) \\
\left(\begin{array}{cccc}
& & & - \\
& & - & - \\
& & - & - \\
& & - & - \\
& - & - & -
\end{array} \right)
\end{array}
\begin{array}{c}
\Pi^{(0)} \\
\Pi^{(1)} \\
\Pi^{(2)} \\
\Pi^{(3)} \\
\Pi^{(4)} \\
\Pi^{(5)}
\end{array}
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccc}
\text{NIL} & & & \text{NIL} \\
\text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & \\
\text{NIL} & & \text{NIL} & \text{NIL} \\
& \text{NIL} & & \text{NIL} \\
\text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & \\
\text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\
\text{NIL} & & \text{NIL} & \text{NIL} \\
& \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\
& \text{NIL} & & \text{NIL} \\
& \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\
& \text{NIL} & & \text{NIL} \\
& & \text{NIL} & \text{NIL} \\
& & & \text{NIL} \\
& \text{NIL} & & \text{NIL} \\
& & \text{NIL} & \\
& & & \text{NIL} \\
& & \text{NIL} & \text{NIL} \\
& & & \text{NIL}
\end{array} \right)
\end{array}$$

$$\Theta \quad \Theta \; n^3$$

$$D \qquad \Pi \qquad O \; n^3$$

PRINT-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATH

$$\Pi^{(0)},\Pi^{(1)},\ldots,\Pi^{(n)} \qquad \Pi \qquad \Pi^{(n)} \qquad \pi_{ij}^{(k)}$$

$$i \qquad j$$

$$, \; , \ldots, k$$

$$\pi_{ij}^{(k)}$$

$$\pi_{ij}^{(0)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{NIL} & i \neq j \\ i & i=j \end{array} \right. \quad w_{ij} \neq \infty$$

$$k$$

$$k$$

$$i \neq j$$

$$k$$

$$\pi_{ij}^{(k)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_{ij}^{(k-1)} \\ \pi_{ij}^{(k-1)} \end{array} \right. \quad d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} \quad d_{kj}^{(k-1)}$$

$$i \qquad j \\ G \qquad G^* \qquad V, E^* \\ i, j \qquad G \qquad i \quad j \; .$$

$$d_{ij} \qquad n \qquad d_{ij} \quad \infty \qquad i$$

$$\Theta \; n^3 \\ \min \\ t_{ij}^{(k)} \qquad G \\ i \quad j \\ G^* \qquad i, j$$

$$t_{ij}^{(0)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} i \neq j & i, j \notin E \\ i = j & i, j \in E \end{array} \right.$$

$$(1) \qquad (l-1) \qquad (l-1) \qquad (l-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{(0)} \\ T^{(3)} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} T^{(1)} \\ T^{(4)} \end{array} \right\}$$

-1)

$$d_{ij}^{(k-1)}$$

$$d_{ik}^{(k-1)}$$

$$d_{kj}^{(k-1)}$$

$$V \qquad \qquad \qquad u \quad v$$

$$w$$

$$w \; u, v$$

$$O \; VE \qquad \qquad \qquad w$$

$$\delta \quad \delta \qquad \qquad \qquad w \quad w$$

$$G \qquad V, E$$

$$w \quad E \rightarrow \mathbb{R} \qquad \qquad \qquad h \quad V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \; u, v \qquad \quad w \; u, v \qquad \quad h \; u \; - \; h \; v \; .$$

$$a \qquad \qquad \qquad p \qquad \qquad \qquad v_0, v_1, \dots, v_k$$

$$w$$

$$w \quad b \qquad \qquad \qquad G$$

$$w$$

$$w$$

$$w \; p \qquad \quad w \; p \qquad \quad h \; v_0 \; - \; h \; v_k \; .$$

$$h \; v_0 \; - \; h \; v_k$$

$$w \; v_i, v_{i+1} \qquad \quad w \; v_i, v_{i+1} \qquad \quad h \; v_i \; - \; h \; v_{i+1} \; .$$

$$h$$

$$w \; u, v$$

$$w$$

$$G$$

$$G' \qquad V', E$$

$$E \quad s, v \quad v \in V \quad w \ s, v \quad v \in V$$

$$s \quad s \quad G'$$

$$G \quad G' \quad G$$

a

$$G \quad G' \quad \forall v \in V'$$

$$h \ v \quad \delta \ s, v \quad u, v \in E'$$

$$h \ v \leq h \ u \quad w \ u, v$$

$$h \ u - h \ v$$

Рис. 26.5 26.6

G'

w .

s

v

$$h(v) = \delta(s, v). \text{ (b)}$$

(u, v)

$$w(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v). \text{ (c) (g)}$$

G

tq

$$\delta(u, v) \delta(u, v).$$

$$d_{uv} = \delta(u, v)$$

$$\delta(u, v) + h(v) - h(u).$$

G'

w

G

G

$$\begin{array}{c}
\oplus \quad \odot \\
\text{summary} \quad \text{extension} \\
S, \oplus, ^-, ^- \in S \\
\bullet S \text{ is closed} \quad \oplus \quad a \oplus b \in S \\
\bullet \quad \oplus \quad \text{is associative} \quad a \oplus b \oplus c \quad a \oplus b \oplus c \\
\quad \quad \quad a, b, c \in S \\
\bullet \quad ^- \quad \text{is an identity} \quad \oplus \quad a \oplus ^- \\
\quad \quad \quad ^- \oplus a \quad a \quad a \in S \\
S, \odot, ^- \quad \text{annihilator} \quad a \odot ^- \quad ^- \odot a \quad ^- \\
a \in S \\
\oplus \quad \text{is commutative} \quad a \oplus b \quad b \oplus a \\
\quad \quad \quad a, b \in S \\
\oplus \quad \text{is idempotent} \quad a \oplus a \quad a \\
\quad \quad \quad \odot \quad \oplus \text{ distributes over} \\
\oplus \quad a \odot b \oplus c \quad a \odot b \oplus a \odot c \quad b \oplus c \odot a \quad b \odot a \oplus c \odot a \\
\quad \quad \quad a, b, c \\
\oplus \\
S \quad a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus \cdots \in S \quad a_1, a_2, a_3, \dots \quad -
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\odot \\
a \odot b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus \cdots \quad a \odot b_1 \oplus a \odot b_2 \oplus a \odot b_3 \oplus \cdots \quad a_1 \oplus \\
a_2 \oplus a_3 \oplus \cdots \odot b \quad a_1 \odot b \oplus a_2 \odot b \oplus a_3 \odot b \oplus \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
G \quad V, E \\
\text{labeling function} \quad \lambda \quad V \times V \rightarrow S \\
\lambda u, v \quad - \quad u, v \\
\text{labels of edges} \\
p \quad v_1, v_2, \dots, v_k \quad \text{path label} \quad \lambda p
\end{array}$$

$$\lambda\; p \qquad \lambda\; v_1, v_2 \;\odot\; \lambda\; v_2, v_3 \;\odot\; \cdots \odot \lambda\; v_{k-1}, v_k \; .$$

$$-$$

$$\lambda\; p \qquad i \qquad \overset{p}{v_i, v_{i+1}} \qquad -$$

$$S \qquad S \quad \mathbb{R}^0 \quad \infty$$

$$\odot$$

$$- \qquad \qquad \qquad \varepsilon$$

$$\lambda\; \varepsilon \qquad w\; \varepsilon \qquad -$$

$$\text{concatenation} \qquad p_1 \qquad v_1, v_2, \ldots ,$$

$$v_k, v_{k+1}, \ldots , v_l$$

$$p_1 \circ p_2 \qquad v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_l \; ,$$

$$\lambda\; p_1 \circ p_2 \qquad \lambda\; v_1, v_2 \;\odot\; \lambda\; v_2, v_3 \;\odot\; \cdots \odot \lambda\; v_{k-1}, v_k \;\odot\;$$

$$\lambda\; v_k, v_{k+1} \;\odot\; \lambda\; v_{k+1}, v_{k+2} \;\odot\; \cdots \odot \lambda\; v_l -$$

$$\lambda\; v_1, v_2 \;\odot\; \lambda\; v_2, v_3 \;\odot\; \cdots \odot \lambda\; v_{k-1}, v_k$$

$$\lambda\; v_k, v_{k+1} \;\odot\; \lambda\; v_{k+1}, v_{k+2} \;\odot\; \cdots \odot \lambda\; v_l -$$

$$\lambda\; p_1 \;\odot\; \lambda\; p_2$$

$$i, j \in V \qquad i \; j$$

$$l_{ij} \quad \bigotimes_{\infty} \lambda\; p \; .$$

$$\textbf{ис. 26.6} \quad 26.7 \qquad p_1 \circ p_2 \quad p_1 \circ p_3 \qquad (\lambda(p_1) \odot (\lambda(p_2)) \oplus (\lambda(p_1) \odot \lambda(p_3))). \\ (\lambda(p_1) \odot (\lambda(p_2) \oplus \lambda(p_3))).$$

$$\textbf{ис. 26.7} \quad 26.8 \qquad c \\ x, \qquad , \; p_1 \circ p_2, \; p_1 \circ c \circ p_2, \; p_1 \circ c \circ c \circ p_2 \quad . \quad .$$

—

$\oplus$

S

∞

$$\min \; a, \infty \quad - \quad \infty \\ a$$

l_{ij}

$i \quad j$

$$u \quad x$$

$$\wedge \; p_1 \odot \lambda \; p_2 \oplus \lambda \; p_1 \odot \lambda \; c \odot \lambda \; p_2 \oplus \lambda \; p_1 \odot \lambda \; c \odot \lambda \; c \odot \lambda \; p_2 \oplus \ldots$$

$$\lambda \; p_1 \odot \overset{\curvearrowright}{\oplus \lambda \; c \oplus \lambda \; c \odot \lambda \; c \oplus \ldots} \odot \lambda \; p_2$$

a

S

$$\text{closure} \qquad a$$

$$a^* \quad - \quad \oplus \; a \oplus \; a \cdot a \oplus \; a \cdot a \cdot a \oplus \; \ldots$$

$$\wedge \; p_1 \cdot \lambda \; c \cdot ^* \cdot \lambda \; p_2$$

$$\infty, \min, \quad, \infty, \qquad S_1 \qquad \mathbb{R}$$

$$S_2 \qquad \mathbb{R} \qquad \infty \qquad -\infty, \min, \quad, \quad \infty, \qquad -\infty$$

$$a^* \quad \left\{ \begin{array}{ll} \quad, & a \\ -\infty, & a \end{array} \right.$$

$$a$$

$$-\mathcal{O}$$

$$S_3 \qquad \qquad , \qquad , \qquad , \qquad , \qquad ,$$

$$-$$

$$\begin{array}{cc} & l_{ij} \\ i,j & \\ i & j \\ & * \qquad * \end{array}$$

$$S$$

$$G,V$$

$$S$$

$$i,j$$

$$l_{ij} \quad \bigoplus \lambda \, p$$

$$i \quad j \quad \lambda \, p$$

$$p$$

$$l_{ij}^{(k)}$$

$$, \quad , \dots , k \qquad l_{ij}^{(k)}$$

$$l_{ij}^{(k)} \quad l_{ij}^{(k-1)} \oplus \quad l_{ik}^{(k-1)} \odot \quad l_{kk}^{(k-1)} * \odot \quad l_{kj}^{(k-1)} \quad .$$

$$l_{kk}^{(k-1)} \, *$$

$$l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \lambda_{i,j} & i \neq j \\ \bigoplus \lambda_{i,j} & i = j. \end{cases}$$

-

$$i \neq j$$

$$k=1,2,\ldots,n$$

$$L^{(n)}=l_{ij}^{(n)}$$

```

Compute Summaries $ lambda V $
b   $n leftarrow V $
b   for $i leftarrow $ to $n$
b       do for $j leftarrow $ to $n$
b           do if $i = j$
b               then $l[i][j] leftarrow bar{lambda[i][j]}$
b               else $l[i][j] leftarrow lambda[i][j]$
b   for $k leftarrow $ to $n$
b       do for $i leftarrow $ to $n$
b           do for $j leftarrow $ to $n$
b               do $l[i][k] = l[i][j] + l[j][k]$
b   return $L$

```

$$\begin{array}{l} \text{SUMMARIES} \\ \Theta(n^3) \\ O \end{array} \quad \begin{array}{l} T_{\odot} \quad T_{\oplus} \quad T_{*} \\ \Theta(n^3) \quad T_{\odot} \quad T_{\oplus} \quad T_{*} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{COMPUTE} \\ \Theta(n^3) \end{array}$$

$$S_1 \in \mathbb{R}^0 \cup \{-\infty, \min, \max, \infty\}, \quad S_3$$

$$S_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty, \min, \max, \infty\}, \quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

COMPUTE-SUMMARIES

$$S_2$$

$$-\infty \quad \infty$$

$$S \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

$$\frac{O(V E)}{\varepsilon}$$

 $\mathbb{R}$

$$w_{i,j}$$

$$G^T$$

minimax

$$S \subseteq \mathbb{R} \quad -\infty \leq \min \max \leq \infty \quad -\infty$$

H

flow network

$G = (V, E)$

$c(u, v)$

$u, v \in E$

capacity

$u, v \in E$

source s

sink t

$v \in V$

$s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$

$E \rightarrow V \rightarrow$

$G = (V, E)$

c

f

$V \times V \rightarrow R$

s

t

flow

G

capacity

constraint

$f(u, v) \leq c(u, v)$

$u, v \in V$

skew symmetry

$f(u, v) = -f(v, u)$

$u, v \in V$

flow conservation

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0.$$

$u \in V - \{s, t\}$

$f(u, v)$

u

v

value

f

$$\sum_{v \in V} f(s, v) = 0.$$

Рис. 27.1 27.1. () $G = (V, E)$

19.

$$c(u$$

$$f(u,$$

$$u \quad v$$

$$u$$

$$\sum_{u \in V}$$

$$u, v \in E \quad v, u \in E$$

$$f(u, v$$

$$f(u, v) = -f(v, u)$$

$$f(v, u$$

$$f(u, v$$

$$\sum$$

$$\sum$$

Ис. 27.2 27.2

$$(v_2, v_1) = 4. \text{ (b)}$$

3

5

$$v_2 \quad v_1.$$

(a)

8

 v_2

v1.

 $\square$ ()
$$v_1 \quad v_2.$$

v1

 V_2

(c)

$$c(v_1, v_2) = 10$$

7

Ис. 27.3 27.3

(a)

$$T = \{t_1 \ t_2 \ t_3\} \quad (\text{b})$$
$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$$

$$\begin{array}{c} m \\ \text{H} \end{array} \qquad s_1, s_2, \dots, s$$

supersource s

$$i \qquad , \qquad , \dots, m$$

a

implicit summary notation

$$\text{H} \qquad X \quad Y$$

$$f(X,Y) \qquad \sum_{x \in X} \sum$$

flow network

p

multicommodity

$c(u, v)$

$u \quad v$

flow value

total

$$\begin{array}{rcl}
 & G & V, E \\
 f & & \\
 u & v & \text{residual} \\
 c_f(u, v) & = & c(u, v) - f(u, v) . \\
 & & u \quad v \\
 c(u, v) & & f(u, v) \\
 f(u, v) & & u, v \\
 c_f(u, v) & & c(u, v) \\
 f(u, v) & & H \\
 c_f(u, v) & & c(u, v) \\
 & & u, v \\
 V, E_f & & \\
 E_f & = & \{u, v \in V \times V \mid c_f(u, v) \\
 & & \text{residual network} \quad G \\
 & & f \\
 \text{residual edges} & & H \\
 & & b \\
 b & & f \quad G \\
 & & G_f \\
 & & u, v \\
 & & E_f \not\subseteq E \quad v_1, s \\
 b & & \\
 & & f(u, v) \\
 & & v, u \\
 & & u, v \\
 & & u, v \\
 & & \\
 E_f & \leq & E . \\
 G_f & & \\
 & & \\
 V, E & & s \quad t \quad f \\
 G_f & & G \\
 & & f \quad f' \\
 G_f & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f \quad f' \\ u,v \in V \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f & f' & u,v \\ f & u,v & f' & u,v \\ & -f & v,u & -f' & v,u \\ & - & f & v,u & f' & v,u \\ & - & f & f' & v,u & . \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f' & u,v & \leq c_f & u,v & u,v \in V \\ f & f' & u,v & f & u,v & f' & u,v & \leq f & u,v & - c & u,v & - f & u,v \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & u \in V \\ f' & u,V & f & f' & u,V & f & u,V & f' & u,V \\ & & . \\ f' & s,V & f & s,V & f' & s,V & f & f' . \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f & G & V,E & H \\ \text{augmenting path} & & & s \\ G_f & & & \\ & u,v & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} H & b \end{array}$$

$$c \quad v_2,v_3$$

$$\begin{array}{rcl} p \\ \text{residual capacity} & p \end{array}$$

$$c_f \; p \qquad \min \; c_f \; u,v \qquad u,v \in p$$

$$\begin{array}{rcl} f & G & V,E & p \\ G_f & f & V \times V \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

Прис. 27.4 27.4 (a) f G (. 27.1). (b) G_f
 p . $c_f(p)$
 $c(v_2, v_3) = 4$. (c) 4,
 p . (d) , . (c).

Прис. 27.5 27.5 (S, T) . 27.1 (b). $S = \{s, v_1, v_2\}$ (
 $)$ $T = \{v_3, v_4, t\}$ (
 $)$ $c(S, T) = 26$ (
 $)$ $f(S, T) = 19$ (
 $)$

G f_p f
 H c
 f_p b
 a

f G V, E p
 G_f f' f f_f

$$f \quad G \quad G$$

$$\begin{aligned} f \ S, T & \quad f \ S, V \\ f \ S, V & \\ f \ s, V & \\ f \ s, V & \\ f & \end{aligned}$$

$$f$$

$$S, T$$

$$\begin{aligned} f & \quad f \ S, V \\ & \sum \sum \\ & \quad u \in S \ v \in \\ & \leq \sum \sum \end{aligned}$$

Рис. 27.6 27.6 FORD-FULKERSON. (a) (d)
 G_f (p
 $\cdot$ (a)
 G . (e)
 $\cdot$
 $\cdot$;

FORD-FULKERSON

p

FORD-FULKERSON $O \ E \ f^*$
 f^*
 $\Theta \ E$
 f^*

$G' \ V, E'$
 $E' \ u, v \ u, v \in E \ v, u \in E \ ,$
 $G \ G'$
 $u, v \ G'$
 $c \ u, v \ - \ f \ u, v \ /$

$O \ E \ O \ E'$ $O \ E \ f^*$
 f
 FORD

$$\text{ис. 27.7} \quad 27.7 \text{ (a)} \quad \Theta(E|f^*|), \quad f^* \quad \text{Ford-Fulkerson} \quad |f^*| = 2\,000\,000. \quad 1. \text{ (b)} \quad \text{. (c)}$$

$$\text{Ford-Fulkerson} \quad p$$

$$O\,VE^2 \quad G_f \quad u \quad \delta_f\,u,v$$

$$V,E \quad s \quad t \quad v \quad V \quad G_{s,t} \quad \delta_f\,s,v \quad v \in V \quad s,t$$

$$\delta_f\,s,v \quad s \quad v \quad V \quad s,t \quad f'$$

$$\delta'_f\,s,v \quad \delta_f\,s,v \quad v \quad G'_f$$

$$\delta'_f\,s,u \quad \delta'_f\,s,v \quad \delta_f\,s,u \leq \delta'_f\,s,u \quad u \in V \quad s,t \quad p' \quad s \quad v \quad G'_f \quad u \quad s \rightsquigarrow u \rightarrow v$$

$$\delta'_f\,s,u \quad \delta'_f\,s,v \quad - \quad \delta_f\,s,u \leq \delta'_f\,s,u \quad u,v \quad E_f \quad f\,u,v$$

$$\delta_f\,s,v \leq \delta_f\,s,u \leq \delta'_f\,s,u$$

$$\begin{array}{rcl}
& & u, v \in E_f \text{ H} \\
& & p \\
& & G_f \\
& & v, u \\
& & p \\
t & G_f & \\
& & \delta_f \ s, u \quad \delta_f \ s, v \\
& & \delta_f \ s, v \quad \delta_f \ s, u - \leq \\
& & \leq \delta'_f \ s, u - \\
& & \delta'_f \ s, v -
\end{array}$$

E
 G

V

$O\,V$

$O\,E$

$O\,VE$

$O\,VE^2$

$O\,V^2E$

$O\,V^3$

H

$s, v_2, v_4 \enspace , \enspace v_1, v_3, t$

b

a

$c \qquad \overset{u \quad v}{c_f \, u, v \quad c_f \, v, u} \qquad \overset{f}{c \, u, v \quad c \, v, u}$

$t_j \qquad \overset{s_i}{\sum_i p_i \quad \sum_j q_j} \qquad \overset{p_i}{f \, s_i, V \quad p_i \quad f \, V, t_j} \qquad q_j$

V, E

E

G

H

edge connectivity

H

V

$O \ V$

$O \ E$

u, v

v, u

$V \cdot E$

u, v

$\delta \ s, u$

$\delta \ v, t$

u, v

27.3.

H

$G \ V, E$

$O \ VE$

$G \ V, E$
matching

$M \subseteq E$

$v \in V$

M

$v \in V$

M is matched

M

v

v

is unmatched

maximum matching

M

M

M'

M'

V

$L \ R$

E

L

R

L

R

u, v

$u \ v$

ис. 27.9

27.9

,

(a)

27.8.

G'

;

L

$R,$

G

V, E

G'

V', E'

G

s

t

V'

V

s, t

G'

E'

s, u

$u \in L$

u, v

$u \in L, v \in R,$

$u, v \in E$

v, t

$v \in R$

L

R

G'

G

f

G

V, E

integer

f

u, v

G

V, E

M

L

R

G'

V', E'

G

G'

f

M

G'

G'

f

f

f

f

$u, v \in M$

f

s, u

f

u, v

f

v, t

f

u, s

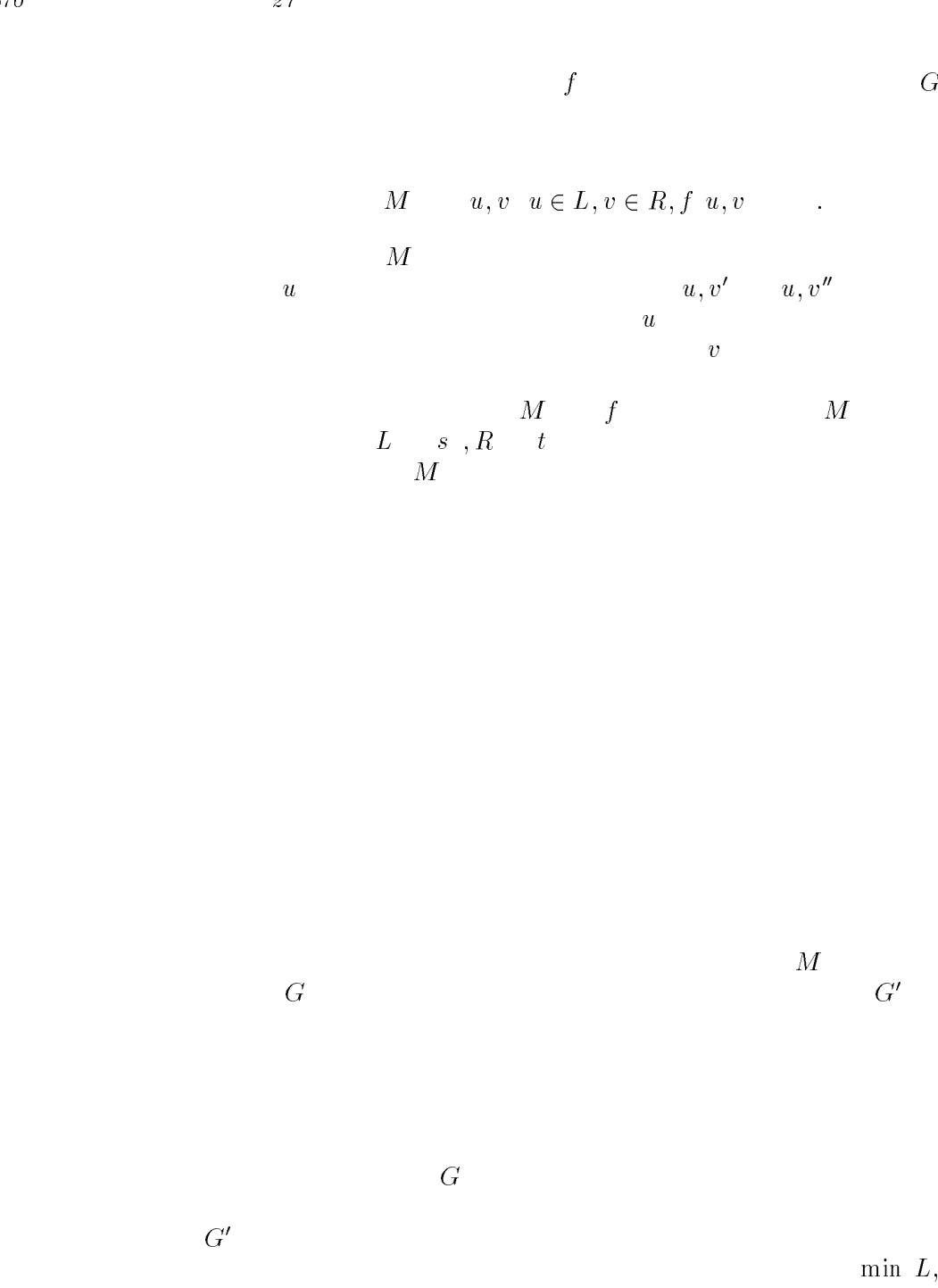
f

v, u

f

t, v

$-$



$$L \quad R$$

$$G \quad V, E$$

$$G'$$

$$G'$$

FORD FULKERSON

$$(\hspace{1.5cm})$$

perfect matching

$$G \quad V, E \\ L \quad R$$

$$X \subseteq V$$

neighborhood of X

$$N \setminus X \quad y \in V \quad x, y \in E$$

$$x \in X,$$

$$X$$

Hall's theo

rem

$$A \subset L$$

$$A \leqslant N \setminus A$$

H

$$G \quad V, E$$

$$L \quad R \quad d \\ v \in V$$

d regular

$$L \quad R$$

$$d \\ d$$

profLow

f

V

✓

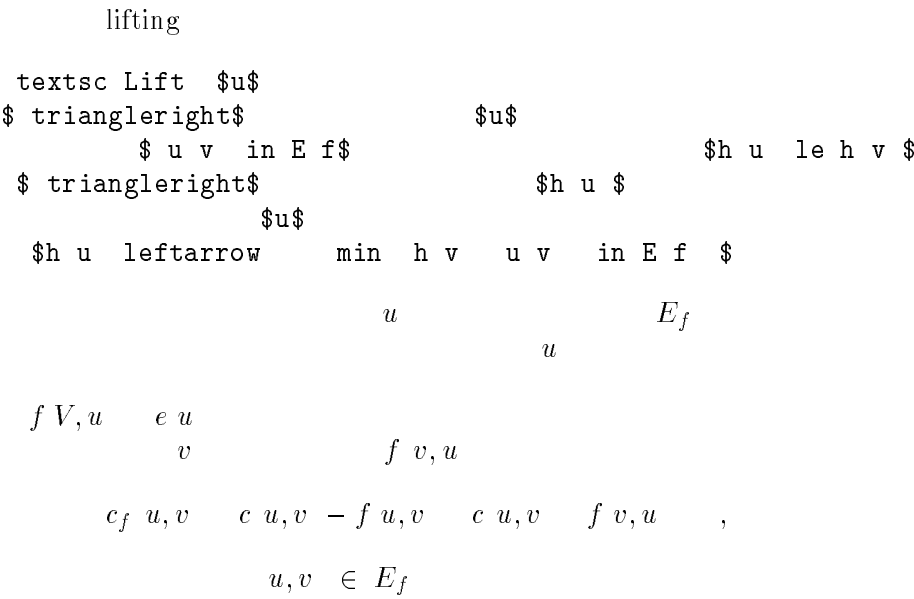
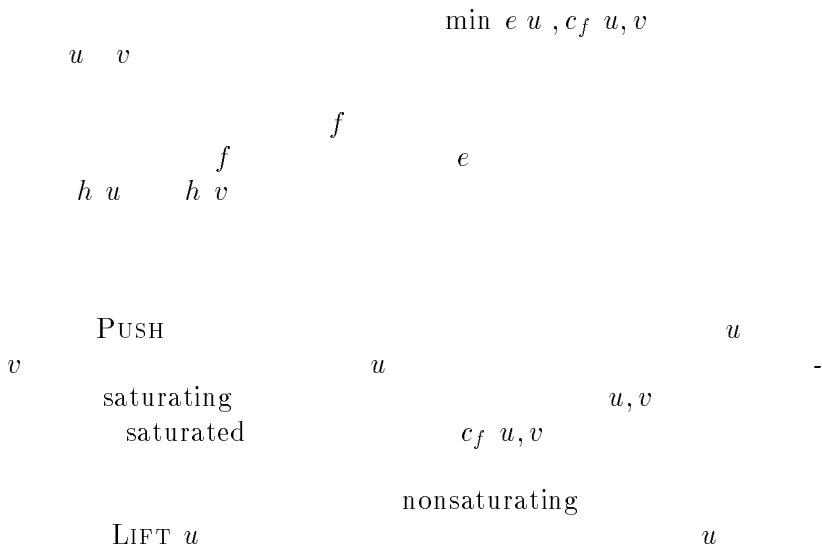
V

\

R

s *t* *f*

height



INITIALIZE-PREFLOW

$$f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) & u \in s, \\ -c(v, u) & v \in s, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

```

textsc Initialize Preflow $G s$
for $u$ in $V G$ $
do $h u \leftarrow$ $
   $e u \leftarrow$ $
for $u, v$ in $E G$ $
do $f u v \leftarrow$ $
   $f v u \leftarrow$ $
   $h s \leftarrow V G$ $
for $u$ in $Adj s$ $
do $f s u \leftarrow c s u$ $
   $f u s \leftarrow -c s u$ $
   $e u \leftarrow c s u$ $

```

$$f(u, v) = \begin{cases} h(u) - c(u, v) & u \in s, \\ c(v, u) & v \in s, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$e(v) = c(s, v) - H(v)$$

$$h(u) = \begin{cases} V, & u \in s, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h(u) - h(v) = \begin{cases} u, v & u \in s, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

GENERIC-PREFLOW-PUSH

```

textsc Generic Preflow Push
textsc Initialize Preflow
while $e(s) > 0$
do

```

$$\begin{array}{ccccccc}
 f & & & G & V, E & & h \\
 & f & & u & & & u \\
 & & & & & & \\
 & h & & & & h & u \leq h & v \\
 & & u, v & & u & & \\
 & & & u, v & & & h & u \\
 h & v & & h & u \leq h & v & & u
 \end{array}$$

$$f$$

h u $u \in V$ GENERIC-PREFLOW-PUSH

GENERIC-PREFLOW-PUSH

$$\begin{array}{ccc} & & u \\ u & & \\ & & \\ & & u \\ & \text{PUSH } u, v & \end{array}$$

$$h \quad u, v \quad E_f \quad v, u \quad E_f \quad h \quad v \quad h \quad u \quad - \quad h$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & G & & V, E & & s & & t & & f \\
 & & G & & h & & & & & \\
 G_f & & & & & & f & & &
 \end{array}$$

V

$$V$$

$$G \quad V, E \quad \text{GENERIC-PREFLOW-PUSH} \quad \begin{matrix} s & t \\ f & \end{matrix} \quad G$$

$$h \quad G_f \quad \begin{matrix} s & t \\ & f \end{matrix}$$

$$O \, V^2 E$$

$$\begin{matrix} G & G & V, E & & s & & t & f \\ & u & s & & G_f & & u & \\ & & & & u & & & s \\ & & & & & s & u & \\ & & & & U & & & u \\ & & & & & & & \\ & & & & U & & & \\ f \, V, U & & f \, V & e \, U & f \, U, U & & f \, V & U, U \leq U \\ & & & & s & u & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} v \in V & \text{GENERIC-PREFLOW-PUSH} \\ & V - \\ & h \, s \quad V \quad h \, t \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & u & & \\ & G_f & & p & s \\ & & & & \\ s & & V & G_f & \\ & & & & V - \\ & & & & V - \\ & & & & \\ \text{GENERIC-PREFLOW-PUSH} & & & & \\ V^2 & & & & \\ \\ V - & & & v \in V - s, t & \\ & V - & & V - & V - \\ & & & V - & V - \\ & & & & V^2 \\ \\ \text{GENERIC-PREFLOW-PUSH} & & & & \\ V - E & & & & \\ \\ u, v \in V & & & & \\ & u, v & v, u & & E \\ & & & u & v \\ & & & G_f & \\ & & & & v & u \\ & & & h v & h u & h v \\ \\ & & & h u & h v \\ x & & u & v & \\ & & & u & v \\ \\ V - & & V - & & V - \\ \\ V - & - & & V - & \\ \\ & & & & V - E & E \\ \\ \text{GENERIC-PREFLOW-PUSH} & & & & \\ V^2 & V & E & & \\ \\ & & & & \Phi \\ & & & \Phi & \\ u & & V & \Phi & V \\ & & & H & \end{array}$$

$$k \qquad \qquad \qquad V \quad E \quad k$$

INITIALIZE-PREFLOW

$$h\ s \leftarrow V\ G \ - \ ,$$

$$\begin{array}{cc} & \delta_f\ u,v \\ u & v \end{array}$$

$$\begin{array}{c} G_f \\ \text{GENERIC-PREFLOW-PUSH} \\ h\ u \quad V \quad h\ u \leq \delta_f\ u,t \end{array}$$

$$h\ u \quad V \quad h\ u \leq \delta_f\ u,s$$

$$\begin{array}{ccc} & \delta_f\ u,v & \\ u & & v \end{array} \qquad G_f$$

$$\begin{array}{ccccccc} \delta_f\ u,t & & h\ u & V & h\ u & \delta_f\ u,s & h\ u \quad V \quad h\ u \\ & & & & & O\ VE & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{GENERIC-PREFLOW-PUSH} & & G \quad V,E \\ V^2\ E & V & \end{array}$$

f
 H
 u, v
 $c_f u, v$
 $E_{f,h}$
 G
 V, E
 h
 $h u$
 $h v$
 $G_{f,h}$
 $V, E_{f,h}$
 $admissible$
 $inadmissible$
 $admissible network$

f
 G
 V, E
 $G_{f,h}$
 h
 $V, E_{f,h}$

f
 u, v
 u, v
 G
 V, E
 h
 u
 u, v

$h u$
 u, v
 v, u
 v, u
 u, v
 $h v$
 $c_f u, v$

f
 u
 G
 V, E
 h
 u
 u
 u
 u
 u

v, u $h\ v$
 $h\ v$ $h\ u$
 u, v

$G = (V, E)$
 $u \in V$
 $list = N\ u$ v
 $v, u \in E$ $N\ u$
 v u, v $head\ N$
 v $next - neighbor\ v$
 $next - neighbor\ v = NIL$

$current\ u$
 $current\ u$ $head\ N\ u$
 u
 discharge
 u

```

textsc Discharge  $u$
  while $e\ u \neq \emptyset$
  do $v \leftarrow current\ u$
    if $v = \emptyset$ textsc nil
      then textsc Lift $u$
        $current\ u \leftarrow head\ N\ u$
      elseif $c\ f\ u\ v \neq \emptyset$ and $h\ u \neq h\ v$
        then textsc Push $u\ v$
      else $current\ u \leftarrow next\ neighbor\ u$
  
```

H

while

while

while

y

current y **a**

s *y*

current y **H**

y

b

y

y, z

z

c

y, z

H

y

d

y, x

e

y

s

g

u

DISCHARGE $current\ u$

$N\ u$ $head\ N\ u$

u

v u, v

u

u

u

$V\ s, t$

u $next\ u$

u $next\ u\ NIL$

```

textsc Lift To Front  $G\ s\ t$
  textsc Initialize Preflow  $G\ s$
  $L\ leftarrow V\ G\ s\ t\ $
  for      $u$ in $V\ G$ setminus $s\ t\ $
  do $current\ u\ leftarrow head\ N\ u\ $
  $u\ leftarrow head\ L\ $
  while $u\ ne\ $\text{textsc nil}
  do $old\ height\ leftarrow h\ u\ $
    textsc Discharge  $u$
    if $h\ u\ old\ height$
    then      $u$  $L$ 
    $u\ leftarrow next\ u\ $

```

$current\ u$

u u

$N\ u$

L

u

u

L

u

u

LIFT-TO-FRONT

L

u

L

DISCHARGE u

u

u

LIFT-TO-FRONT

L

$G_{f,h} \quad V, E_{f,h}$

$h \ s$
 s

V
 t

V

u

u

$G \quad V, E \quad O \ V^3$

LIFT-TO-FRONT **a** H s L *current u* x y t x x L **b** y

H

 y L y x x t L **d** x z t L **a**

Рис. 27.10 27.12

(a)

(

. H

,

). (H

n i, j
 $n \times n$ grid i j i i n j
 escape m
 $m \leq n^2$
 $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$ m
 H
 b
 a

b

V, E path cover P
 V P

minimum

G V, E
 G' V', E'
 V' $x_0, x_1, \dots, x_n$ $y_0, y_1, \dots, y_n$,

$$I_k \qquad c_k$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & G & & s & & \\ \dots, I_n & E_1, E_2, \dots, E_m & & & & & \\ & c_k & k & , & , \dots, n & E_j, t & \\ p_j & j & , & , \dots, m & I_k, E_j & & \\ & I_k \in E_j & k & , & , \dots, n & & \end{array}$$

$$S,T$$

$$E_j \in T \qquad I_k \in T$$

$$p_j$$

$$\sum_{j=1}^m R_j$$

$$G$$

$$u,v\in E$$

$$O\,V\,E\\ u,v\in E$$

$$O\,V\,E$$

$$\begin{array}{ccc} G & V, E & s \qquad t \\ c\,u, v & & u, v \in E \\ \times c\,u, v & & \\ - E & & \end{array}$$

```

$K \leftarrow \lfloor \log C \rfloor$
while $K \ge 0$
do while
do
    $f \leftarrow \text{find\_path}(K)$
    $K \leftarrow K - 1$
return $f$

```

c MAX-FLOW-BY-SCALING

d

$$K \leq E$$

e

$$O(E)$$

$$K$$

f

MAX-FLOW-BY-

SCALING $O(E^2 \log C)$

$$G = (V, E)$$

$$u, v$$

$$b(u, v) \leq f(u, v) \leq c(u, v)$$

$$c - b$$

$$f$$

$$G$$

$$f \leq c(S, T)$$

$$b(T, S)$$

$$S, T$$

$$b$$

$$G$$

$$S, T$$

$$c(S, T) - b(T, S)$$

$$G = (V, E)$$

$$s$$

$$t$$

$$c$$

$$G'$$

$$V', E'$$

$$c'$$

$$s'$$

$$t$$

$$V'$$

$$V$$

$$s', t'$$

$$E'$$

$$E$$

$$s', v$$

$$v \in V$$

$$u, t'$$

$$u \in V$$

$$s, t, t, s$$

$$u, v \in E$$

$$u \in V$$

$$c'(s', u)$$

$$b(V, u)$$

$$c(u, v) - b(u, v)$$

$$c'(u, t') - b(u, V)$$

$$c'(s, t)$$

$$c'(t, s)$$

$$\infty$$

c

$$G$$

$$G'$$

H

H

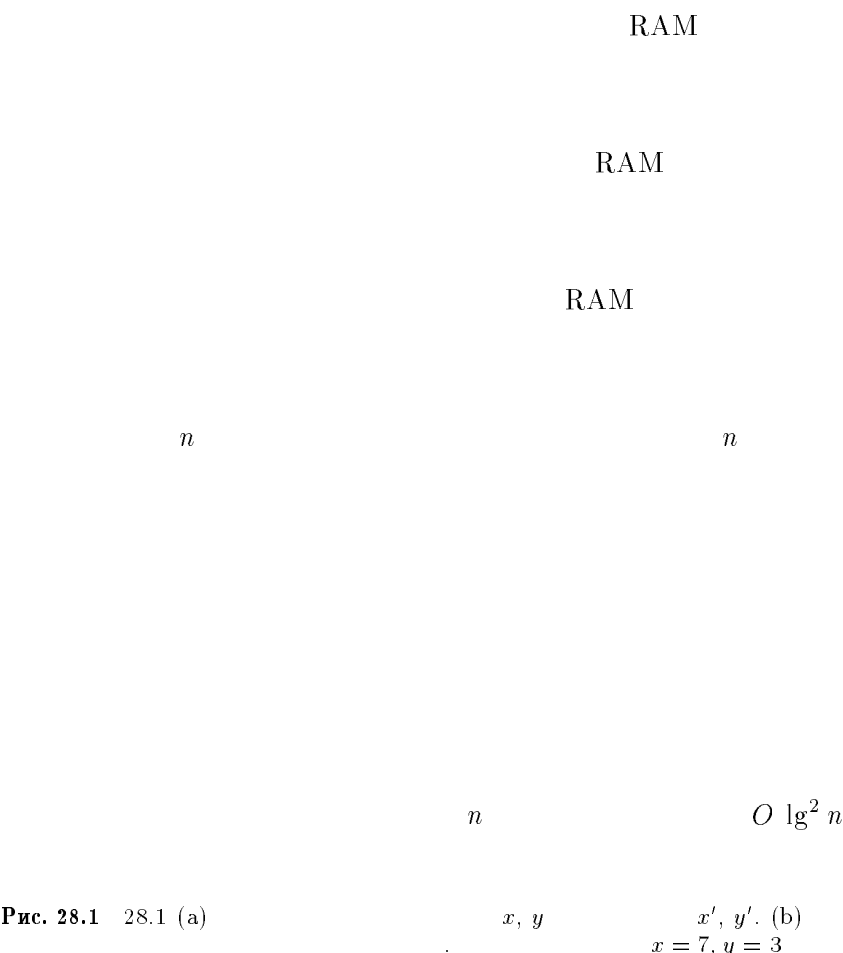


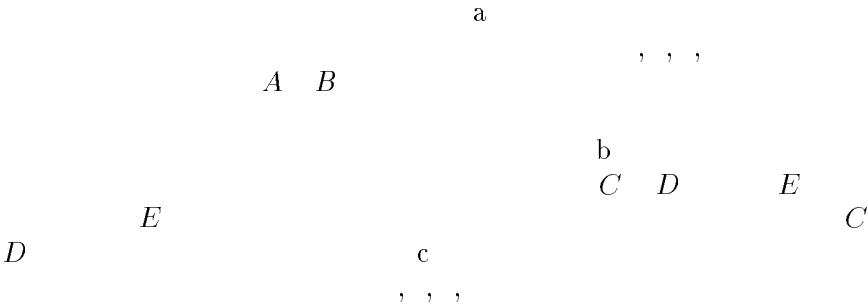
Рис. 28.1 28.1 (a) x, y x', y' . (b) $x = 7, y = 3$

Рис. 28.2 28.2 (a) $4 \quad 4$,
 . $A \quad B$ 0. (b)
 $C \quad D$; 1. (c) 2
 $b_2, b_3)$. (d) $b_1 \quad b_4$ (
 E .

28.1.

x, y comparator a
 x', y'
 $x' \quad \min x, y$,

$b_1, b_2, \ldots, b_n$



depth

$d_x \quad d_y \qquad \max d_x, d_y$

E

size

work sorting net

$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$

$A \quad B \qquad C$



28.2.

zero one principle

$$\begin{aligned}
& f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(b_1, b_2, \dots, b_n) \\
& f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(b_1, b_2, \dots, b_n) \\
& f(\min x, y) = f(\max x, y) \\
& \max f(x), f(y) = \min f(x), f(y) \\
& f(x) \leq f(y) \\
& \min f(x), f(y) = f(\min x, y), \\
& \max f(x), f(y) = f(\max x, y). \\
& x \leq y \implies f(x) \leq f(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1, a_2, \dots, a_n \\
& f(a_1, a_2, \dots, a_n)
\end{aligned}$$

$$f$$

ис. 28.5 (a)

28.2 $(9, 5, 3, 6)$. (b)

$$f(x) = [x \ 2]$$

Рис. 28.6

4

i , , . . . , n —

i i

рис. 28.7

HALF-CLEANER 8



рис. 28.8

HALF-CLEANER N

$$D(n) = \text{BITONIC-SORTER}(n)$$

$$D(x) = \begin{cases} D(n/2), & \text{if } n \text{ is even} \\ D(n/2) + 1, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

$$D(n) = \lg n$$

$$n$$

$$\text{BITONIC-SORTER}(n) = \Theta(n \lg n)$$

$$n$$

$$O(\lg n)$$

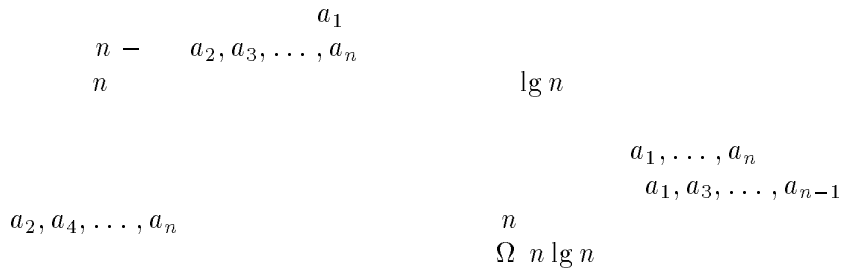
$$n$$

ис. 28.9 MERGER 8 (a) HALF
CLEANER 8 (b) 4 . (a)
MERGER $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n/2} \rangle$
 $\langle a_{n/2+1}, a_{n/2+2}, \dots, a_n \rangle$
 $\langle b_{n/2+1}, b_{n/2+2}, \dots, b_n \rangle$. (b)
:
 $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n/2}, a_{n/2+1}, \dots, a_n$
 $\langle b_1, b_2, \dots, b_{n/2} \rangle$
 $b_{n/2+1}, b_{n/2+2}, \dots, b_n \rangle$.

ис. 28.10 MERGER n BITONIC-SORTER
:
:
:
(,
).

o
 X
 X
 Y^R
 XY^R XY^R

MERGER n
 $a_1, \dots, a_{n/2}$ $a_{n/2+1}, \dots, a_n$
BITONIC-SORTER n
 a_i
 $a_{n/2+i}$ i , , ..., n a_i



n

$O \ n \lg n$

28.5.

SORTER n

SORTER n

SORTER n

MERGER n

MERGER

a

b

c

SORTER n

$\lg n$

n

MERGER

n

MERGER

k

k

$, \dots, \lg n$

n

k

$$S^k \quad M^k \qquad k \qquad k$$

$$m \times m$$

is a transposition network

a

b

$$n, n- \quad , \ldots ,$$

-

odd ev

$$n \qquad \qquad \qquad d^i \qquad \qquad \qquad , \ldots n -$$

$$i \qquad \qquad \qquad i$$

$$i \qquad \qquad \qquad i+d$$

c.

network - n

$$a_{n+1}, \ldots , a_{2n}$$

n

$$a_1, a_3 \ldots , a_{n-1} \qquad \qquad \qquad a_{n+1}, a_{n+3} \ldots , a_{2n-}$$

$$a_{n+2}, a_{n+4} \ldots , a_{2n}$$

$$i$$

i

a

n

b

permutation network

 n
 n
 $n!$

a

 P_2
 π
 i
 $\pi \ i$
 i
 $, \dots, n$
b
 P_8
 P_4
 π
 $, , , , , , ,$
 $, , ,$
 P_4
 $, , ,$
 P_4
 $, , , , , , ,$
 n
 P_n
 P_{n-2}
 P_8
 P_n
 $O \ n$
 P_n
 P_n
b
 n



29.1.

29.1.1. Функциональные элементы

boolean combinational element

boolean combinational element logic gate

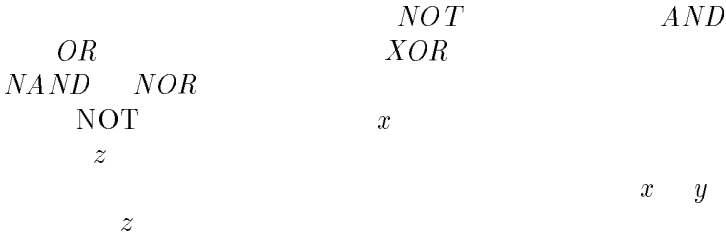


Fig. 29.1. 29.1

29.1.2. Схемы из функциональных элементов

combinational circuits wires

fan out

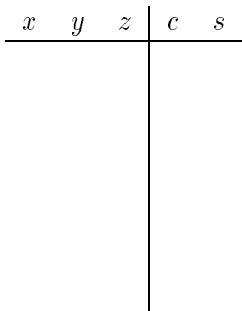
n

...

29.1.3. Сумматор

full adder

$x \ y \ z$
 $c \ s$



$$\begin{array}{ccccc} & & x & y & z \\ x & & & & \\ & y & & z & \end{array} \quad 2$$

Рис. 29.2 . (a)

$$F \quad 2. \quad (d)$$

$$G$$

$$A \quad E$$

$$F$$

b

s

d

29.1.4. Глубина схем

29.1.5. Размер схемы

size

n

n

AND OR NOT

29.1.6. Упражнения

29.1-1

a d x

y z

29.1-2

$n -$

XOR

n

$\lg n$

29.1-3

AND OR NOT

29.1-4

NAND

29.1-5

XOR

NAND

29.1-6

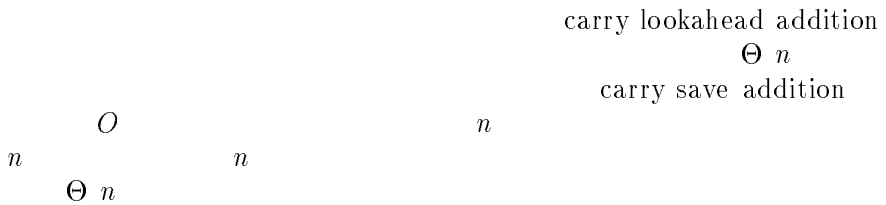
C

n

n

d

C



29.2.1. Каскадное сложение

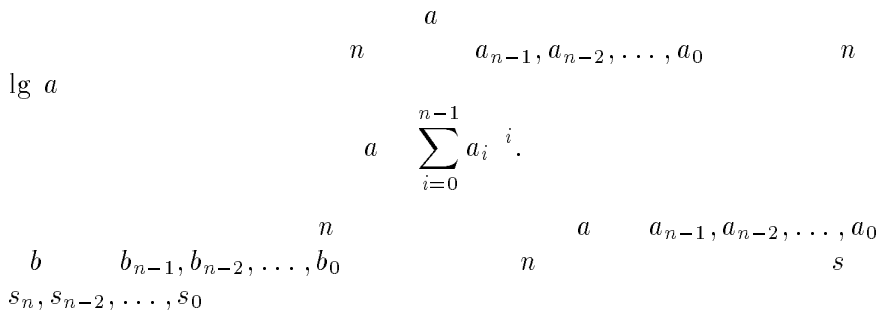
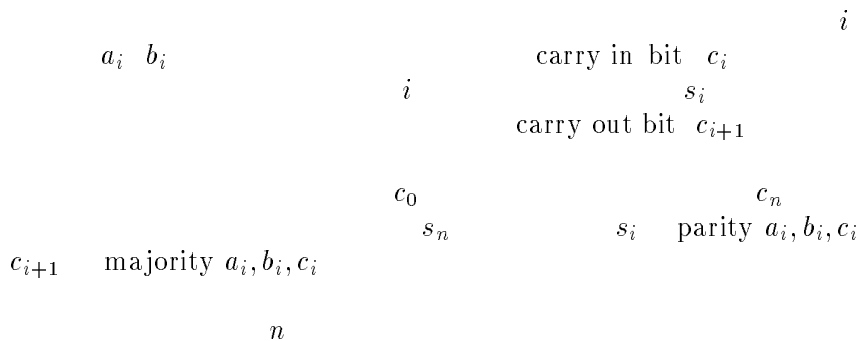
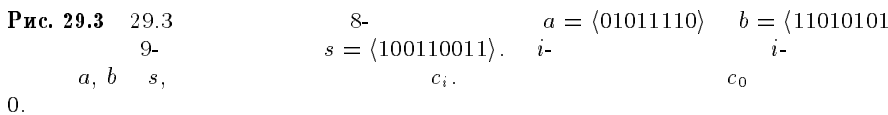


Рис. 29.3 29.3



9.2.2. Сложение с предвычислением переносов

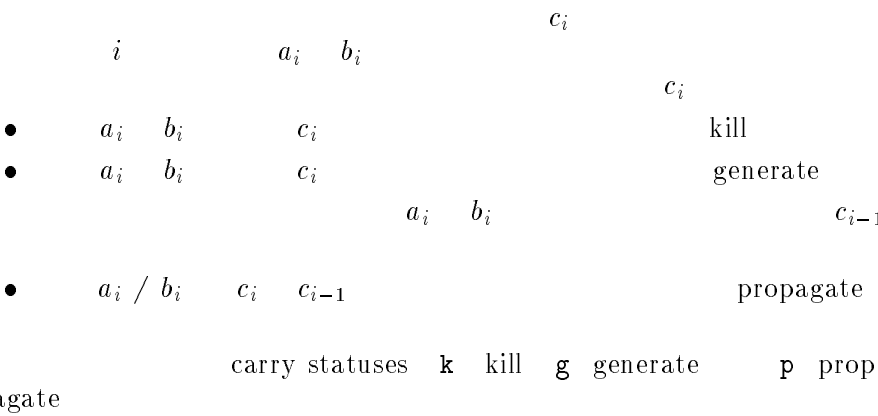


Рис. 29.5

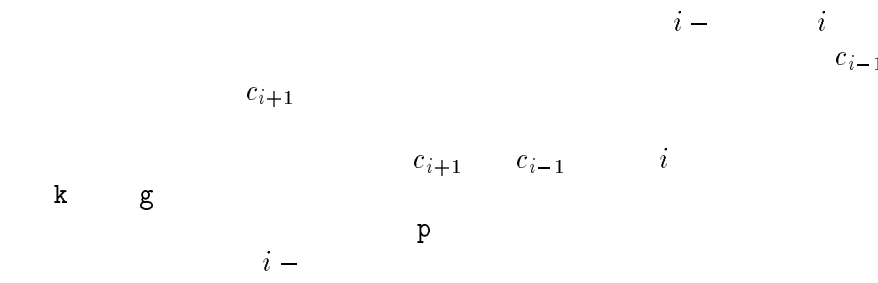
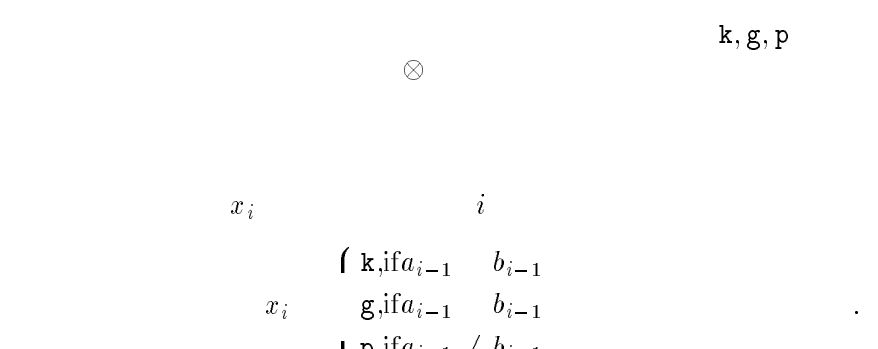


Рис. 29.6



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_i & c_i & \\
 & & \mathbf{k} & c_i & & & \mathbf{g} \\
 \mathbf{p} & & & & & & \\
 & \mathbf{p} & & & x_0 & & \\
 & & & & & & y_0 \quad \mathbf{k} \\
 y_1, y_2, \dots y_n & & & & & & \\
 & y_i & x_i \otimes y_{i-1} & & x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_i & & \\
 & & & & & & \text{prefixes} \\
 & y_0, \dots y_n & & & & & \\
 x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 y_i & & & & & &
 \end{array}$$

Рис. 29.7 29.7. x_i y_i . 29.3.

Лемма 29.1 $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & y_i & \mathbf{k} & & c_i & \\
 & & y_i & \mathbf{g} & & c_i & \\
 & & y_i & \mathbf{p} & & & \\
 & & & & i & i & y_0 \\
 x_0 & \mathbf{k} & c_0 & & & & i - \\
 & & y_i & \mathbf{k} & x_i & \mathbf{k} & c_i & x_i & \mathbf{p} \\
 x_{i-1} & \mathbf{k} & & & & & c_{i-1} & c_i & c_i - \\
 & & & & & & & c_i & \\
 & & y_i & \mathbf{g} & & & & & \\
 & & y_i & \mathbf{p} & x_i & \mathbf{p} & y_{i-1} & \mathbf{p} & \\
 & & & & & & & & c_i \\
 & & & & & & & & y_i
 \end{array}$$

29.2.3. Вычисление типов переноса с помощью параллельной префиксной схемы

$$y_i, i \quad \otimes \quad \otimes \quad , \quad , \quad , \quad , \dots$$

$$y_i$$

$$n \quad x_1, \dots, x_n \quad y_0, \dots, y_{n-1} \\ \text{a} \quad x_0 \quad y_n$$

Рис. 29.8

$$x_i, \dots, x_{j-1}, \quad x_i, \dots, x_k. \quad x_j, \dots, x_k. \quad \otimes (\\ 0, j-1 = 0, i-1 \otimes i, j-1. \quad i, k = i, j-1 \otimes j, k$$

Рис. 29.9 29.9
b)

$$n = 8. \text{ (a)}$$

. 29.3

$$\otimes$$

$$\otimes \quad i, j - \quad j, k \\ i, k$$

$$, i - \quad \otimes \quad , i - \quad i, j - \quad , i - \quad \otimes$$

$$n$$

$$n -$$

$$O \lg n$$

$$\lg n$$

$$O \lg n - n$$

29.3.

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} & & n \\ & & a \\ & & a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \\ & & b \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} n \\ b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0 \end{matrix} \\
 & p = a \cdot b = \sum_{i=0}^{n-1} m^{(i)}, \\
 & m^{(i)} = a \cdot b_i \cdot 2^i \\
 & \begin{matrix} b_i & b_i & m_i \\ & & b \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 29.13 29.13 $a = \langle 1110 \rangle$ $b = \langle 1101 \rangle$ $m^{(i)}$;
 $p = a \cdot b = \langle 10110110 \rangle$.
 a i , $b_i = 1$.

$\Theta(n^2)$ $\Theta(n)$
 Wallace tree multiplier
 $\Theta(n^2)$ $\Theta(\lg n)$

29.3.1. Матричный умножитель

$$\text{AND} \qquad n^2$$

$$FA_j^{(i)}$$

$$\begin{array}{llll} \text{рис. 29.14} & 29.14 & n=4. & \text{AND,} \\ G_j^{(i)}, & j\text{-} & m^{(i)}. & \\ & & FA_j^{(i)}) & \\ & & n & m_0^{(0)} \\ u\text{-} & , & & \\ & . & n & \\ \text{-} & v\text{-} & , & \\ & & . & 29.13. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & m^{(0)} & m^{(1)} & & \\ u^{(1)} & v^{(1)} & n & & & v^{(1)} & \\ m^{(0)} & n & & & & & \\ m^{(1)} & u^{(1)} & v^{(1)} & & u^{(1)} & v^{(1)} & m^{(2)} \\ u^{(2)} & v^{(2)} & n & & & & \end{array}$$

$$u^{(i-1)}\ v^{(i-1)}\ m^{(i)}\ \begin{matrix} i \\ u^{(n-1)}\ v^{n-1} \end{matrix},\ \dots,\ n-\begin{matrix} \\ n- \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l} u^{(n-1)}\quad u^{(n-1)}\quad \sum_{i=0}^{n-1} m^{(i)} \\ p. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & v^{(i)} & & m_j^{(i)} & & & \\ ,\dots,i- ,i & n,\dots, n- & v_j^{(i)} & j & ,\dots,i,i & n,i \\ ,\dots, n- & & i & & & & \\ n- & i,i & ,\dots,i & n- & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{рис. 29.15} & 29.15 \\ & : \\ & .\ 29.13\ (a=\langle 1110\rangle,b=\langle 1101\rangle) \\ & \\ m^{(0)}+m^{(1)}+0=u^{(1)}+v^{(1)}, & u^{(1)}+v^{(1)}+m^{(2)}=u^{(2)}+v^{(2)} \\ (2)+v^{(2)}+m^{(3)}=u^{(3)}+v^{(3)}, & ,\ p=m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)}+m^{(3)}=u^{(3)}+v^{(3)} \\ n_0=m^{(0)}\quad n_i=u^{(i)}\quad i=1\ 2\quad n-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
G_j^{(i)} & & G_j^{(i)} & & m_j^{(i)} & & j & & i & & n \\
& & i & & & & \text{AND} & & & & n \\
& & & & m^{(i)} & & & & n-i- & , n-i- & , \dots, i \\
& & & & & & & & FA_1^{(i)} , \dots , FA_{n-1}^{(i)} & & i \\
& & & & & & & & u^{(i)} & v^{(i)} & FA \\
& & & & m_j^{(i)} & u_j^{(i-1)} & v_j^{(i-1)} & & & & u \\
v_{j+1}^{(i)} & & & & & & u_{i+n-1}^{(i)} & m_{i+n-1}^{(i)} & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & v_j^{(n-1)} & & j & & , \dots, n- & & p_j & & u_j^{(n-)} \\
& & & & & & & & & & \\
j & & , \dots, n- & & & & m_0^{(1)} & & u_0^{(1)} & & m_0^{(1)} \\
& & i & & & & m^{(i)} & & v^{(i-1)} & & \\
u_j^{(i)} & & u-i- & j & i & & , \dots, n- & j & , \dots, i- & & \\
& & p_0 & m_0^{(0)} & & & p_i & u_i^i & i & & , \dots, n- \\
& & & n & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
p_{2n-1}, p_{2n-2}, \dots, p_n \\
u_{2n-2}^{(n-1)}, u_{2n-3}^{(n-1)}, \dots, u_n^{(n-1)} \quad v_{2n-2}^{(n-1)}, v_{2n-3}^{(n-1)}, \dots, v_n^{(n-1)} .
\end{array}$$

29.3.2. Характеристики схемы

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & n- \\
\Theta & n & & & & & \\
& & \Theta & n & & \Theta & \lg n \\
& & & & \Theta & n & \\
& & & & n^2 & & \text{AND} \\
& & \Theta & n^2 & & \Theta & n
\end{array}$$

29.3.3. Умножение с помощью дерева Уоллеса

O
 $\Theta \lg n$
 $\Theta \lg n$
 $\Theta \lg n$
 Θn^2
 n
 $m^{(0)}, \dots, m^{(7)}$
 $m^{(i)}$
 $n - i$
 $n -$
 n
 n

Рис. 29.16 29.16
 $n^{(0)}, \dots, m^{(7)}$.

Wallace'

$$\Theta~n^2$$

$$\Theta~n$$

$$\Theta~n^2$$

29.3.5. Упражнения

$$, \dots, i, i \quad n, i \quad n \quad , \dots, \quad n - v_j^{(i)}$$

$$FA_t^{(}$$

$$y \quad z \qquad s \quad c \qquad n_x, n_y, n_x, n_c, n_s \\ n_x \leqslant n_y \leqslant n_z$$

$$n_c \quad \left\{ \begin{array}{ll} n_z & n_y \quad n_z, \\ n_z & n_y \quad n_z \end{array} \right.$$

$$O$$

$$O\lg n \qquad O~n^2$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \cdot & & \cdots & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdots & & \cdot & & \cdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & \text{cyclic shifter bar} \end{array}$$

$$x \quad x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0 \quad s \quad s_{m-1}, s_{m-} \\ m \quad \lg n \quad u \quad u_{-1} \quad u_{-2} \quad u_{-3} \quad u_{-4} \quad u_{-5}$$

clocked

circuits

$$\begin{array}{ccccc} & & \Theta & & n \\ \Theta & n & & & \\ & \Theta & n & & \Theta & n \end{array}$$

29.4.1. Устройство побитового сложения

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & n \\ a & & a_{n-1}, a_{n-2} \dots, a_0 & & b & & b_{n-1}, b_{n-2} \dots, b_0 \\ & & a_0 & b_0 & a_1 & b_1 & \end{array}$$

Рис. 29.17

 FA
$$\begin{array}{ccccccc} & & i- & (i+1)- & & & \\ & & a_i & b_i & & & c_i \\ s_i & & c_{i+1}; & & & & \end{array}$$
$$c_0 = 0.$$

(a)-(e)

$$a = \langle 1011 \rangle$$

29.4.4. Одномерный умножитель

$$\Theta \ n^2$$

$$\Theta \ n$$

$$\Theta \ n$$

obasant's algorithm

a

Russian

a

a

b

b

Рис. 29.18

29.18

19

29

a

2 (

),

b -

2.

), (a)

. (b)

29.4.5. Простая реализация

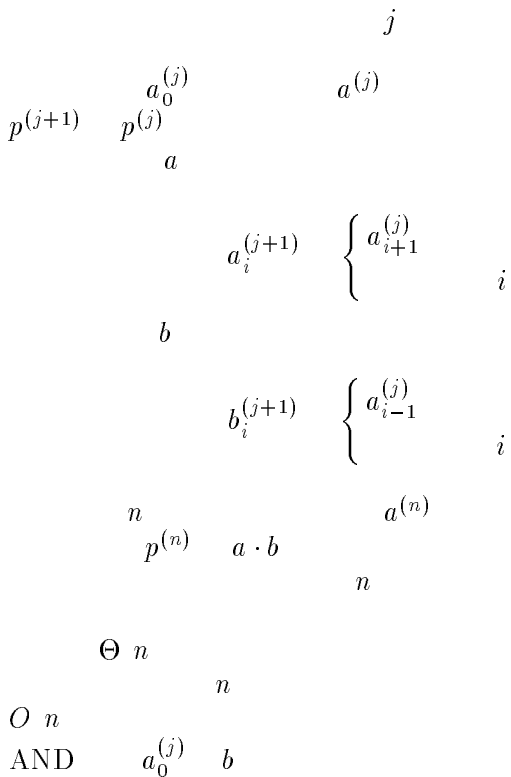


Рис. 29.19 29.19

$a = 19 = \langle 10011 \rangle$ $b = 29 = \langle 11101 \rangle$
 ;
 ($\Theta(n^2)$).

, $\Theta(1)$. $2n -$
 ($u \quad v$,

$$u \quad v$$

$$u \quad v \qquad \begin{matrix} a & b \\ & a_0^{(j)} \end{matrix}$$

$$u_i^{(j+1)} \quad parity \; b_i^{(j)}, u_i^{(j)}, v_i^{(j)}$$

$$, \ldots, \; n -$$

$$\left\{ \begin{matrix} majority \; b_{i-1}^{(j)}, u_{i-1}^{(j)}, v_{i-1}^{(j)} \\ i \end{matrix} \right. \leq i \leq \; n -$$

$$b^{(j)}$$

$$u_i^{(j+1)} \quad parity \quad , u_i^{(j)}, v_i^{(j)}$$

$$, \ldots, \; n -$$

$$\left\{ \begin{matrix} majority \quad , u_{i-1}^{(j)}, v_{i-1}^{(j)} \\ i \end{matrix} \right. \leq i \leq \; n -$$

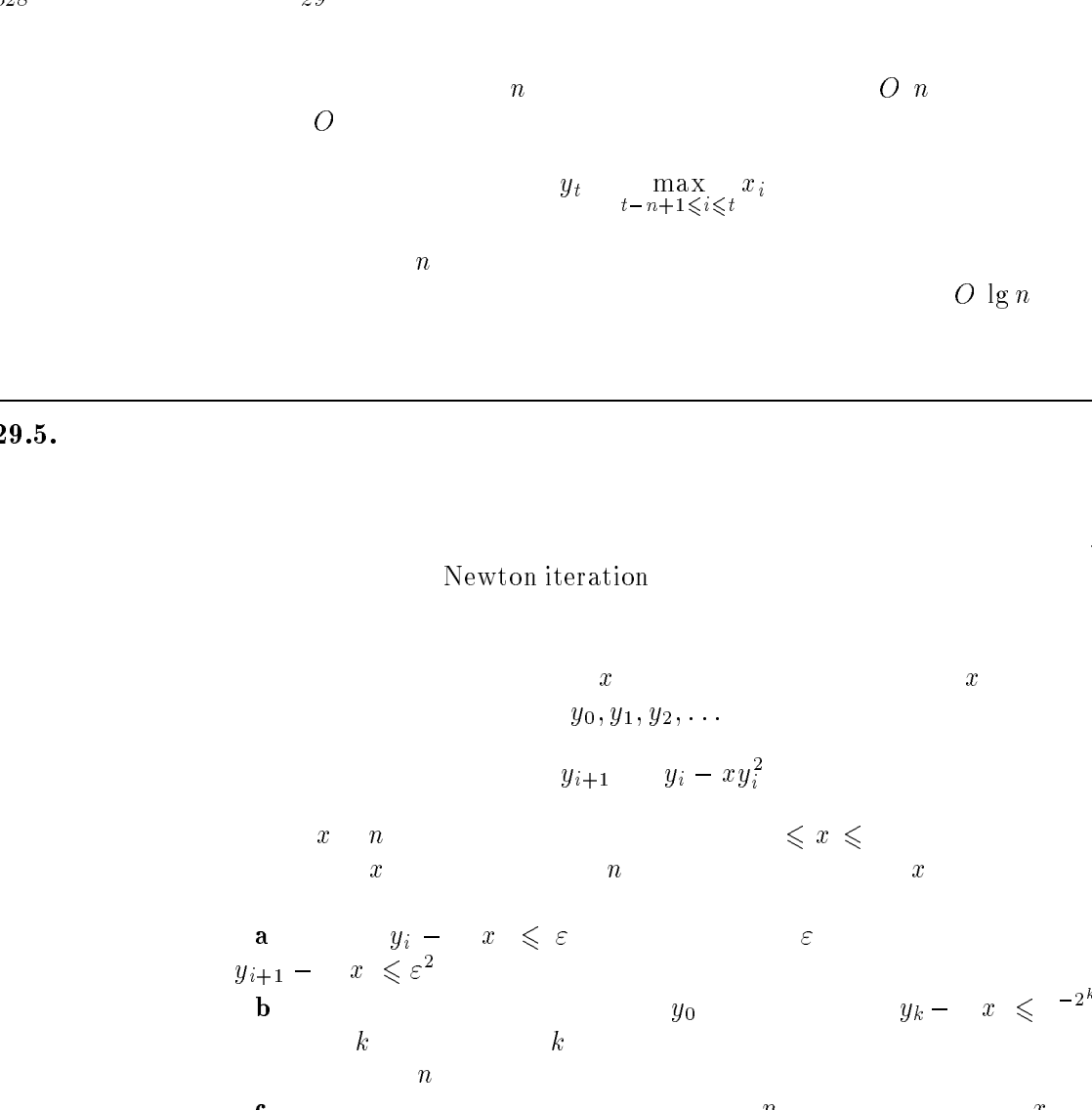
$$a \cdot b \qquad n - \qquad \begin{matrix} j & n \\ u & v \end{matrix} \qquad a^{(j)}$$

$$\begin{matrix} u & v \\ u & v \end{matrix} \qquad v^{(2n-1)} \qquad n$$

$$n - \quad \Theta \qquad \Theta \; n$$

$$a$$

$$(2n-1)$$



n $O \lg n$

AND OR NOT

a $O \lg n$

majority function

$$\text{majority}_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_n & n \end{cases}$$

b d $O_d f$ f **c****d** $O \lg n$ **e** n



parallel algorithms

30.0.1. Параллельная машина с произвольным доступом (PRAM)

parallel random access machine PRAM

$P_0, \dots, P_{p-1}$ shared memory

PRAM

30.0.2. Параллельный и исключительный доступ к памяти

CRCW

common CRCW

model

- arbitrary
- priority
- combinational

30.0.3. Синхронизация

 O

EREW

CRCW

 O

30.0.4. План главы

CRCW EREW

PRAM

30.1.

$O \lg n$

n

n

$O \lg n$

EREW

Рис. 30.2 30.2.

while d 1. (b) (d). $O(\lg n)$. (a). :
LIST-RANK. d

$next\ i$ i

$$d\ i \quad \left\{ \begin{array}{ll} next\ i & \text{NIL} \\ d\ next\ i & next\ i \ / \text{ NIL} \end{array} \right.$$

list ranking prob
em

$$\Theta\ n \quad k \\ k -$$

$$\Theta\ \lg n$$

LIST-RANK L

for

do if $next\ i$ NIL

then $d\ i \leftarrow$

else $d\ i \leftarrow$

while i $next\ i \ / \text{ NIL}$

do for i

do if $next\ i \ / \text{ NIL}$

then $d\ i \leftarrow d\ i \quad d\ next\ i$

$next\ i \leftarrow next\ next\ i$

while

30.1.2. Корректность

i $next\ i$
 $d\ i$ $next$

EREW

$next\ i$ / $next\ j$ $next$

$d\ i$ $d\ next\ i$ i

30.1.3. Анализ

L n
 O
 while

work

PRAM

$$\Theta \ n \lg \ n$$
$$\Theta \ n$$

LIST-RANK

$$\lg \ n$$

A

B A is work efficient with respect to B

A B

A work

efficient

$$\Theta \ n$$

10.1.4. Параллельная обработка префиксов списка

n EREW

$\mathcal{O} \lg \ n$

$\otimes$

prefix computation

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$
$$y_1 \quad x_1$$
$$y_1 \quad y_{i-1} \otimes x_i \quad x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_i$$

y_k

$$\leq i \leq j \leq n$$

$$k \leq i \leq j \leq k \leq n, \dots, n$$

i

!

k

LIST-PREFIX L

for

do $y[i] \leftarrow x[i]$

while

do for

do if $next[i] \neq \text{nil}$

then $y[next[i]] \leftarrow x[next[i]]$

y

RANK

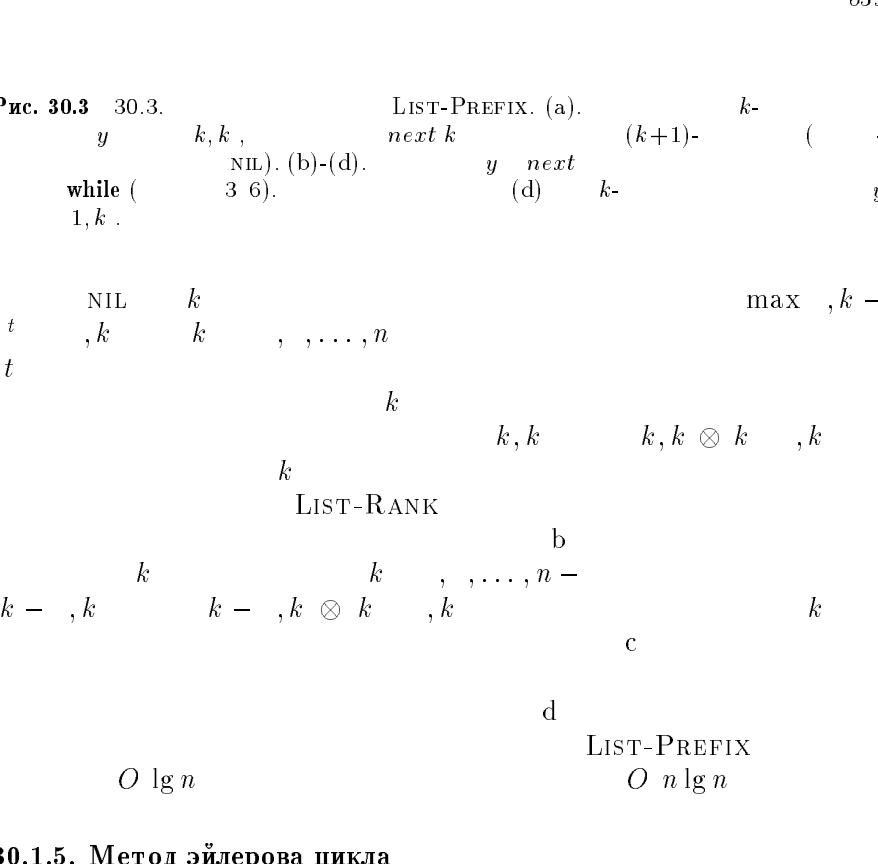
i

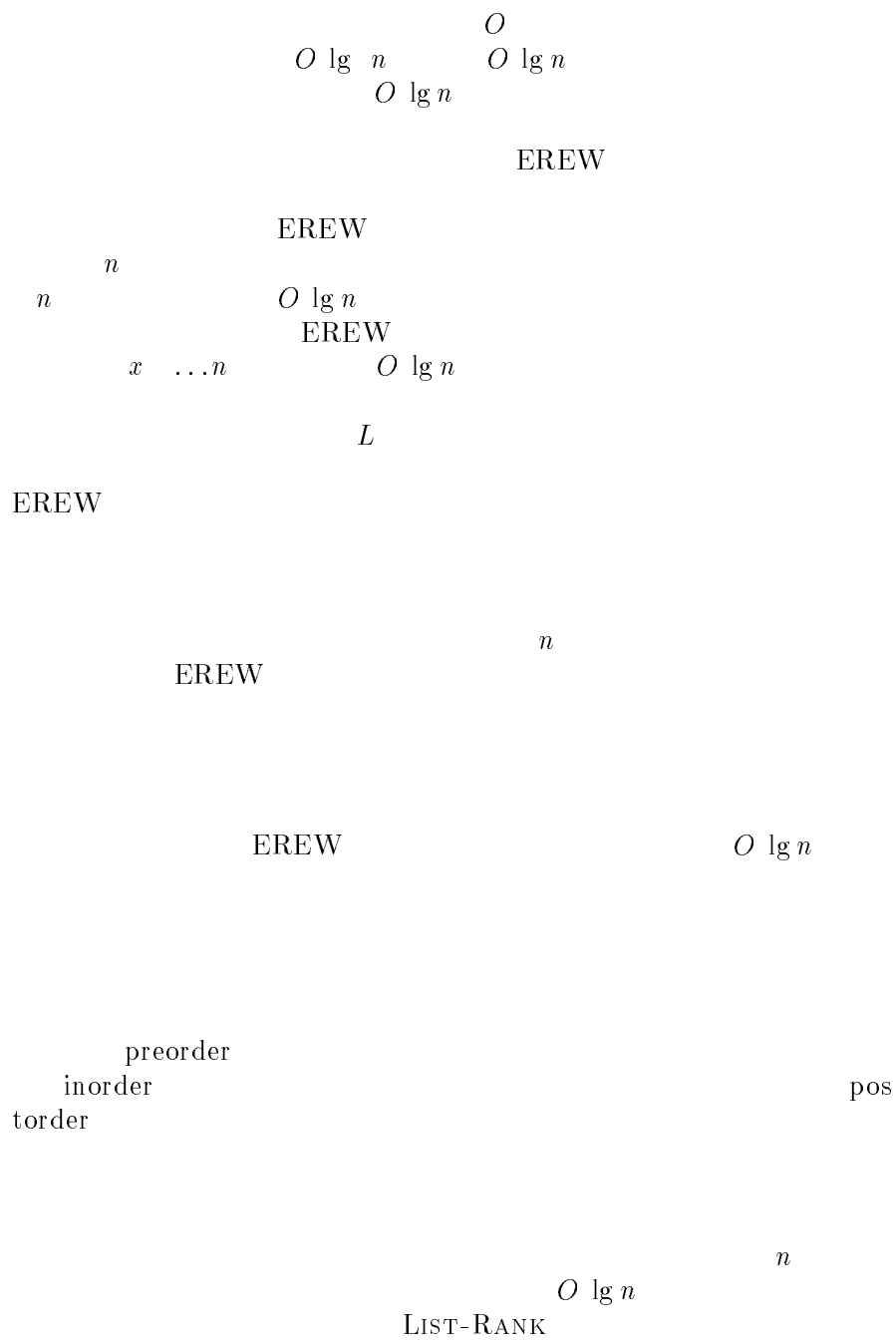
LIST-RANK

$next[i] \neq \text{nil} \wedge next[j] \neq \text{nil}$

ER

while





30.2. CRCW- EREW-

CRCW

EREW

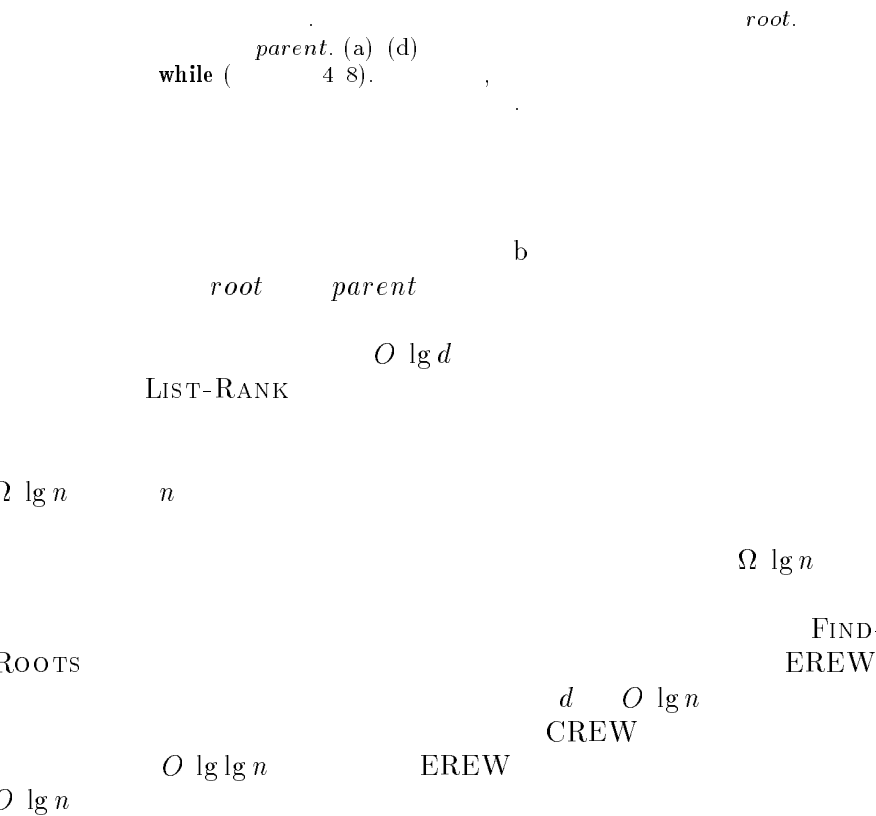
30.2.1. Польза параллельного чтения

i $parent\ i$
 $parent\ i$ NIL
 i $root\ i$

FIND-ROOTS F

for i
do if $parent\ i = NIL$
then $root\ i \leftarrow i$
while $i \neq parent\ i \neq NIL$
do for i
do if $parent\ i \neq NIL$
then $root\ i \leftarrow root\ parent\ i$
 $parent\ i \leftarrow parent\ parent\ i$

Рис. 30.5 30.5. CREW-



30.2.2. Польза параллельной записи

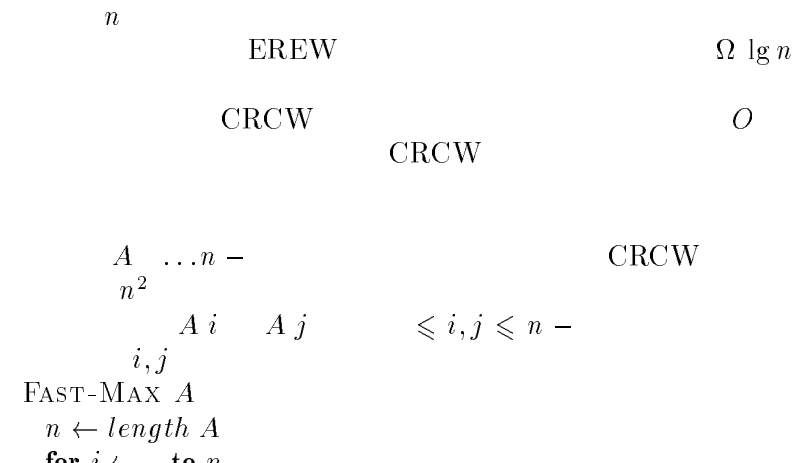


Рис. 30.6 30.6.

FAST-MAX. ()

$A = \langle 5, 6, 9, 2, 9 \rangle$

TRUE, FALSE).

m FALSE, TRUE.
 m TRUE,
 max).

```

do  $m[i] \leftarrow \text{TRUE}$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$ 
do if  $A[i] < A[j]$ 
then  $m[i] \leftarrow \text{FALSE}$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$ 
do if  $m[i] = \text{TRUE}$ 
then  $max \leftarrow A[j]$ 
return  $max$ 

```

$\langle i, j \rangle$

$A[i]$

7

$i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$m[i] = \bigvee_{j=0}^{n-1} A[i][j]$$

EREW

O
EREW
EREW

$\Omega \lg n$

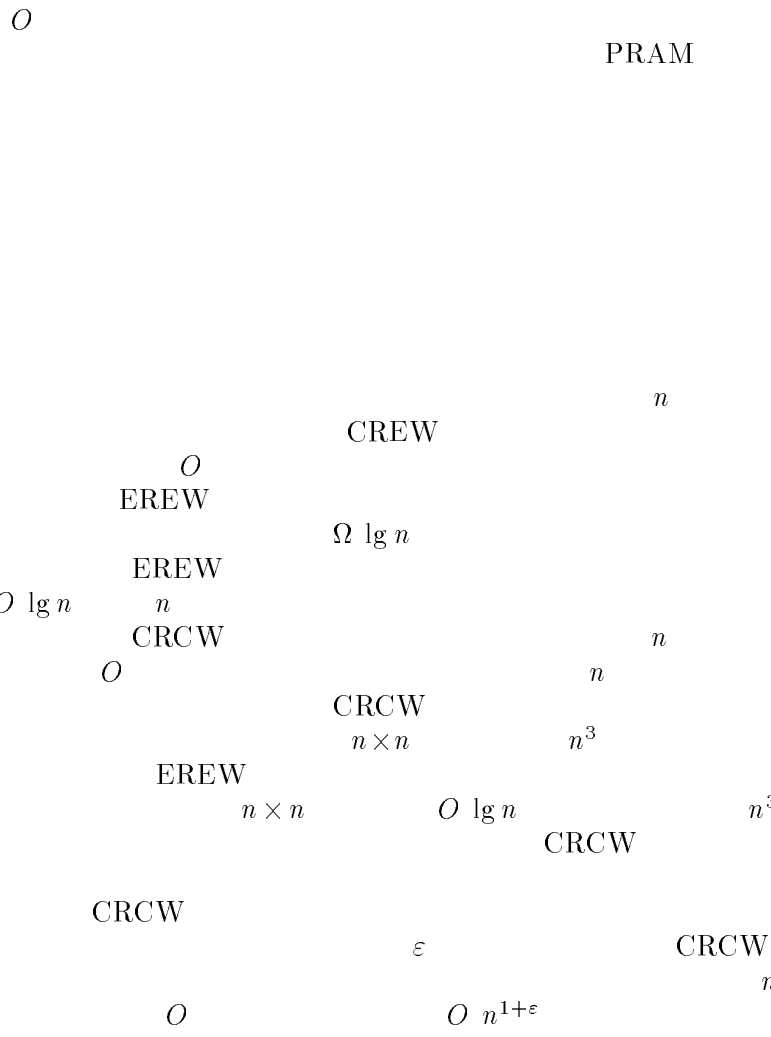
$\Omega \lg n$

CREW

$\Omega \lg n$
CREW

$\Omega \lg n$

n



ис. 30.8 30.8.

CREW-

15

$$9 \leq 15 \cdot 2 + 5$$

(

),

d

, \dots, i

i

p

p

i

n_i

$n_i \cdot p$

$$\sum_{i=1}^d \left(\frac{n_i}{p} \right) = \frac{n}{p} \cdot d$$

EREW

Следствие 30.3

d

n

EREW

p

$O(n \cdot p \cdot d)$

Доказательство

n

ER

$O \quad n \lg n \quad n \quad \lg$

$O \lg n$

EREW

p

p'

p

Теорема 30.4

A

p

t

p'
 p'

p

A'

$O \ pt \ p'$

Доказательство

A

$, \dots, t$

A'

$O \ p \ p'$

A'

$tO \ p \ p'$

$O \ t \ p \ p'$

$O \ pt \ p'$

$p' \ p$

A

pt

A'

$O \ pt \ p' \ p' \ A$

$O \ pt$

A

A'

t

w

w

$p \quad \Theta \ w \ t$

p'

30.3.1. Упражнения

30.3-1

CRCW

c

30.3-2

EREW

n

$O(n \lg n)$

$O(\lg n)$

30.3-3

$n \times n$

n

$O(\lg n)$

30.3-4

CRCW

$n \times n$

n^2

$\Theta(n^3)$

EREW

30.3-5

CRCW

t

w

EREW

p

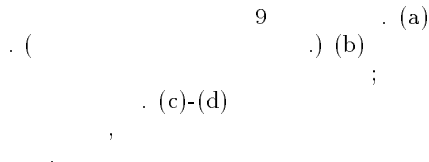
$O(w p t \lg p)$

splice out

splice in

RANDOMIZED-LIST-PRE

Рис. 30.9 30.9.



splice out

splice in

stage

top

Рис. 30.10 30.10.

RANDOMIZED-

9

30.4.1. Рекурсивная параллельная обработка префиксов

$next\ i$

$next\ i$

i

$n\ \lg n$

$\lg n$

$O\ \lg n$

$- \frac{n}{c}$

$\Theta\ \frac{c\ \lg n}{\lg n}$

c

$c\ \lg n$

$\lg n$

$c\ \lg n$

X

$X\ \lg n$

$$\mathbf{P}\ [X\ \lg n \leq C \frac{\lg n}{c\ \lg n}]^{c\ \lg n - \lg n} \leq \left(\frac{ec\ \lg n}{\lg n}\right)^{\lg n} = (c-1)^{\lg n} \left(ec\right)^{c-1}$$

c

$c\ \lg n$

n^2

$n\ \lg n$

$n\ \lg n$

n

$$O \lg n$$

$$-n$$

30.4.4. Упражнения

30.4-1

30.4-2*

$$O(n)$$

$$O(\lg n)$$

30.4-3*

$$O(n \cdot p)$$

30.4-4*

$$k$$

$$- \frac{c}{n^k}$$

$$\frac{c \lg n}{c^k}$$

30.4-5*

$$O(\lg n)$$

$$\begin{array}{l} \text{EREW} \\ O \lg^* n \\ \lg^* n \leq n \leq 65536 \end{array}$$

$$O \lg$$

30.5.1. Раскраски и максимальные независимые множества

$$\begin{array}{l} \text{coloring} \\ C : V \rightarrow \mathbb{N} \\ u, v \in E \end{array} \qquad \begin{array}{l} G = (V, E) \\ C(u) \neq C(v) \end{array}$$

, , ,

$$\begin{array}{l} O \lg n \\ O \lg^* n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} V' \subseteq V \\ \text{independent set} \end{array} \qquad G = (V, E)$$

$$V \rightarrow V'$$

$$\mathsf{NP}$$

$$n$$

$$n$$

$$O\lg n$$

$$n$$

$$O$$

$$O$$

30.5.2. Вычисление 6-раскраски

$$x$$

$$P\left(x\in\left\{1,\ldots,n-\right\}\right)$$

$$C_0,C_1,\ldots,C_m$$

$$C_0$$

$$C_m$$

$$k$$

$$C_k$$

$$\frac{C_{k+1}}{C_0}$$

$$m$$

$$O\lg^*n$$

$$C_0(x)$$

$$P(x)$$

$$\lg n$$

$$C_{k+1}-C_k$$

$$C_k-C_{k+1}$$

$$C_k$$

$$r$$

$$x \rightarrow next\ x$$

$$C_k(x)$$

$$a \rightarrow C_k \rightarrow next\ i$$

$$b$$

$$a_0, \ldots, a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-1}$$

$$b_0, \ldots, b_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}$$

$$b_0, \ldots, b_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}$$

$$b_0, \ldots, b_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}$$

$$b_0, \ldots, b_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}$$

$$b_0, \ldots, b_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}$$

$$b_0, \ldots, b_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}$$

$$b_0, \ldots, b_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}$$

Рис. 30.11 30.11.

6-

$O(\lg^* n)$. $n = 20$ n
 (MIS).

 $, a_0$ a_{r-1}, a_r

x y $next\ x$
 a $a_{r-1}, a_{r-2}, \dots, a_0$ b $b_{r-1}, b_{r-2}, \dots, b_0$
 i x i, a_i
 y j, b_j
 i j
 b_i a_i
 k
 r k
 $\lg r$ r
 r

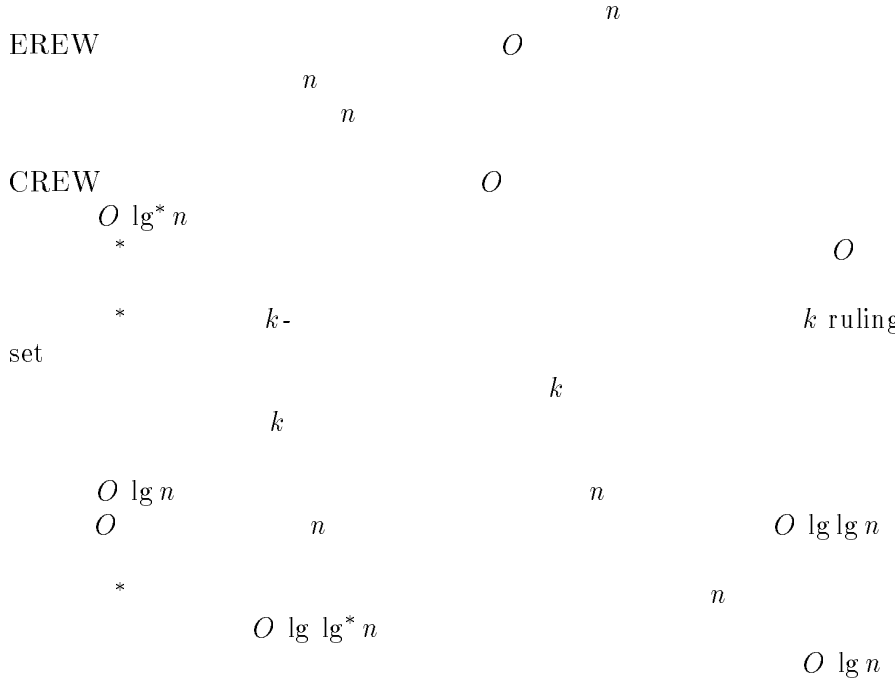
 O O x $next\ x$ $O \lg^* n$
 n $\lg^* n$ $\lg$ $\lg^{(i)} n$ i $\lg^* n \quad \min_i \quad \lg^{(i)} n \leq$

$$\begin{aligned}
 i - & & r_i & \lg r_{i-1} \\
 r_i & \lg r_{i-1} & \leq \lg \lg^{(i-1)} n & \leq \lg \lg^{(i-1)} n \\
 & \lg \lg^{(i-1)} n & \lg \lg^{(i-1)} n & \lg^{(i)} n \\
 & & & \lg^{(i)} n \\
 \lg^{(i-1)} n & & & \\
 & m \lg^* n - & r_m \leq \lg^{(m-1)} & \leq \\
 \lg^{(m+1)} n \leq & \lg^{(m)} n \leq & \lg^* n & \\
 r_{m+1} \leq & & & \\
 & & O \lg^* n &
 \end{aligned}$$

30.5.3. Получение максимального независимого множества из 6 раскраски

$$O \lg^* n$$

30.5.4. Упражнения



ис. 30.12 30.12.

$x \leq b$ (

5

a, $\times S$ $\otimes$

$a, z \otimes a', z' \left\{ \begin{array}{l} a, z \otimes z' \\ a', z' \end{array} \right.$

b) EREW

$O \lg n$

c) EREW $n \leq k$

$O(k \lg n)$

n n

CRCW n

a $p \leq n$

$m \leq p$ m

O

b $m^2 \leq p$ CRCW p

k m p

c CRCW n

$O \lg \lg n$ $p \leq n$

CRCW $G = (V, E)$

$V = E$

v $p \leq v$ $p \leq v$ v

$u \leq v$ $p \leq v$ $p \leq u$

rees $u \leq v$ $star$ $p \leq u$ $p \leq v$ $pointe$

u, v E v, u

STAR $star \leq v$ HOOK JUMP

v $TRUE$

HOOK G

STAR G

for $u, v \in E \setminus G$

do if $star \leq u \leq p \leq u \leq p \leq v$

then $p \leq u \leftarrow p \leq v$

```

STAR  $G$ 
for  $u, v$ 
do if  $star\ u\ p\ u\ /\ p\ v$ 
then  $p\ p\ u\ \leftarrow p\ v$ 
JUMP  $G$ 
for  $v$ 
do  $p\ v\ \leftarrow p\ p\ v$ 

```

HOOK HOOK

```

HOOK
a STAR
b  $p$ 

```

c

$u\ v$

C

T_i

C

$\Phi\ C\ \sum$

M
 $p \times p$
 $n \times n$

Block Transfer

 of bits BITBLT
BITBLT $r_1, c_1, r_2, c_2, nr, nc, *$

$$M[r_2 - i, c_2 - j] \leftarrow M[r_2 - i, c_2 - j] * M[r_1 - i, c_1 - j]$$

$$i = 0, \dots, nr - j \quad , \quad j = 0, \dots, nc - i \quad *$$

$$M[i, j] \leftarrow M[j, i]$$

BITBLT
BITBLT
 $O \lg n$
 p
 n
BITBLT



$$n \times n$$

$$\Theta \ n^{\lg 7}$$

$$O \ n^{2.81}$$

с

$$\times$$

$$j$$

$$\mathbb{R}^{m \times n}$$

$$m \times n$$

$$m \times n$$

gonal matrix

$$i \ / \ j$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \\ & a_{22} & \dots \\ & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

matrix

$$\begin{pmatrix} & \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{pmatrix}.$$

tridiagonal matrix

$$i \qquad \qquad \qquad t_{i,i} \qquad \qquad i$$

$$i \qquad , \qquad , \dots , n -$$

—

$$\begin{pmatrix} & & \\ & t_{n-2,n-1} & \\ & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ & t & t & t \end{pmatrix}.$$





$$n \times m \times n$$

$$x^T y$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\text{inner product}$$

$$z_{ij} = x_i z_j$$

$$\text{outer product}$$

$$\text{norm}$$

$$x^T x = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$x^T x = \|x\|^2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$n \times n$$

$$\text{singular}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{nonsingular}$$

$$A = B$$

$$BA^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

$$\sim_{\mathcal{A}}^{-1} T \sim_{\mathcal{A}} T^{-1}$$



x

$$\begin{aligned} x^T A^T A x &= Ax^T Ax \\ Ax^2 & \end{aligned} .$$

$$\begin{aligned} Ax^2 & \\ Ax^2 & \\ Ax & \quad Ax \\ Ax & \quad A \end{aligned} \quad Ax$$

$$x$$

$$\begin{aligned} P &= A \quad n \times n \\ PA & \quad P \\ AP & \quad A \end{aligned}$$

$$P^{-1} \quad P^T \quad P^T \quad P \quad P$$

$$AB^T \quad B^T A^T \quad A^T A$$

$$A$$

$$C \quad A \quad B \quad C \quad E$$

$$\begin{aligned} n \times n & \quad A \quad B \\ A & \quad j \quad i \quad AB \quad I \\ B' & \quad A' \quad B \quad i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A & \quad n \times n \\ A^{-1} & \quad A \end{aligned}$$

 A

$$B \begin{matrix} A \\ n \end{matrix}$$

$$r \quad ae \quad bf \qquad \qquad \qquad .$$

$$s \quad as \quad bh \qquad \qquad \qquad .$$

$$t \quad ce \quad df \qquad \qquad \qquad .$$

$$u \quad cg \quad dh \qquad \qquad \qquad .$$

$$n \times$$

$$n \quad -$$

$$T \; n \qquad \qquad \qquad n \times n$$

$$T \; n \qquad T \; n \qquad \Theta \; n^2 \qquad \qquad \qquad .$$

$$T \; n \qquad \Theta \; n^3$$

$$n \times n \quad - \qquad \qquad \Theta \; n^2 \\ n \times n$$

$$T \; n \qquad T \; n \qquad \Theta \; n^2 \; , \qquad \qquad \qquad .$$

$$T \; n \quad \Theta \; n^{\lg 7} \\ O \; n^{2.81} \; .$$

$$n \qquad \qquad \qquad n \times n \qquad \qquad \qquad A \quad B \\ \qquad \qquad \qquad A \quad B \\ \qquad \qquad \qquad A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_7, B_7 \qquad \qquad \qquad n \times \\ \Theta \; n^2$$

$$P_i \quad A_i B_i \; i \quad , \ldots , \\ \qquad \qquad \qquad r, s, t, u \qquad \qquad \qquad C$$

$$- \; , \; , \qquad \qquad \qquad P_i \qquad \qquad \Theta \; n^2$$

$$P_1\;P_7$$

$$P_i$$

$$\begin{array}{l} P_i\quad A_iB_i \\ \alpha_{i1}a\quad \alpha_{i2}b\quad \alpha_{i3}c\quad \alpha_{i4}d\quad \cdot\quad \beta_{i1}e\quad \beta_{i2}f\quad \beta_{i3}g\quad \beta_{i4}h\;, \\ \alpha_{ij},\beta_{ij}\qquad\qquad\qquad P_i\qquad\qquad\qquad -\;, \;, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \\ B \end{array}$$

$$\times$$

$$\begin{array}{l} r\quad ae\quad bf \\ \smile_{a\quad b\quad c\quad d}\left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} e \\ f \\ g \\ h \end{array}\right) \\ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array}\left(\begin{array}{cccc} e & f & g & h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right).\end{array}$$

$$\cdot\quad -$$

$$\begin{array}{c} C \\ s \quad ag \quad bh \\ \left(\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right), \\ t \quad ce \quad df \\ \left(\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \end{array} \right), \\ u \quad cg \quad dh \\ \left(\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{array} \right). \\ s, t, u, v \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P_1 \quad P_2 \\ P_1 \quad A_1 B_1 \\ a \cdot g - h \\ ag - ah \\ \left(\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right). \\ P_2 \quad A_2 B_2 \\ a \quad b \cdot h \\ ah \quad bh \\ \left(\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right). \\ t \qquad t \quad P_3 \quad P_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
P_3 \quad A_3B_3 \\
\quad c \quad d \cdot e \\
\quad ce \quad de \\
\quad \left(\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right),
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
P_4 \quad A_4B_4 \\
\quad d \cdot f - e \\
\quad df - de \\
\quad \left(\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & & \cdot & \cdot \end{array} \right).
\end{array}$$

$$s \quad t$$

$$bh \quad ce \quad df$$

$$\begin{array}{l}
s \quad t \\
\qquad \qquad \qquad r \quad u \\
ae \; bf \; cg \quad dh \\
\times \quad -
\end{array}$$

$$ag$$

$$\begin{array}{l}
P_5 \quad A_5B_5 \\
\quad a \quad d \cdot e \quad h \\
\quad ae \quad ah \quad de \quad dh \\
\quad \left(\begin{array}{cccc} & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \end{array} \right).
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
ah \quad de \\
\qquad \qquad \qquad ae \quad dh \\
P_4 \quad P_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} P_5 & P_4 - P_2 & ae & dh & df - bh \\ & & \left(\begin{array}{cccc} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \end{array} \right) \end{array}.$$

$$\begin{array}{ccccc} P_6 & A_6 B_6 & & & \\ & b - d & \cdot & f & h \\ & bf & bh - df - dh & & \\ & \left(\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & - & \cdot & - \end{array} \right), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} r & P_5 & P_4 - P_2 & P_6 & \\ & ae & bf & & \\ & \left(\begin{array}{cccc} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \end{array}.$$

P_5

P_5

P_5

$P_1 - P_3$

ae

$ag - ce$

dh

$\left(\begin{array}{cccc} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{array} \right).$

u

P_1

P_3

$$\begin{array}{ccccc} P_7 & A_7 B_7 & & & \\ & a - c & \cdot & e & g \\ & ae & ag - ce - cg & & \\ & \left(\begin{array}{cccc} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & - & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right), \end{array}$$



×

k

$n \times n$

$n \times n =$
 k

$O(n^{\lg 7})$

×
×

×

$n \times n$

$kn \times n$

$n \times kn$

$a \quad bi \quad c \quad di$

a, b, c, d
 $ac - bd \quad ad \quad bc$

31.3.

LUP

LUP

LUP

LUP

PA

LU

A

$n \times n$

$Ax = b$

LU-SOLVE

$\Theta(n^2)$

$$n \qquad \qquad \qquad Ax \quad b$$

$$A$$

$$i$$

$$e_i$$

$$n$$

$$L$$

$$n$$

$$\begin{array}{cc} I_{n} & O_{I\,n} \\ O_{I\,n} & \end{array}$$

$$n \times n$$

$$D$$

$$D^+$$

$$=1$$

$$I_n \qquad I_n \qquad O \, I_n \qquad I_n$$

$$n \qquad \qquad \qquad I_n$$

$$n^c \lg^d n \qquad \qquad \qquad c$$

$$n \times n \qquad M_n$$

$$M_n \leq M_n \leq c_2 M_n \qquad \qquad \qquad c_1 \qquad c_2$$

$$\qquad \qquad \qquad n \times n$$

$$O \, M_n$$

$$\begin{pmatrix} A & \\ & I_k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & I_k \end{pmatrix},$$

$$k$$

$$n'$$

$$M_n \qquad M_{n'}$$

$$A$$

$$n \times n$$

$$A = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix}.$$

$$S = D - CB^{-1}C^T,$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & b^{-1}C^TS^{-1}CB^{-1} & -B^{-1}C^TS^{-1} \\ -S^{-1}CB^{-1} & & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$A \qquad \qquad \qquad A \qquad \qquad \qquad B \qquad S$$

$$B^{-1}C^T \qquad CB^{-1}{}^T \qquad B^{-1}C^TS^{-1}$$

$$^{-1}CB^{-1}{}^T$$

$$n \times n =$$

$$C \cdot B^{-1},$$

$$CB^{-1} \cdot C^T,$$

$$S^{-1} \cdot CB^{-1},$$

$$I_n \leq I_n \qquad M$$

$$d$$

$$I_n \leq CM$$

$$I_n \leq I_n \qquad M_n$$

$$\leq CM_n \qquad M$$

$$\leq Cc_1M_n \leq$$

$$\leq CM_n$$

$$C$$

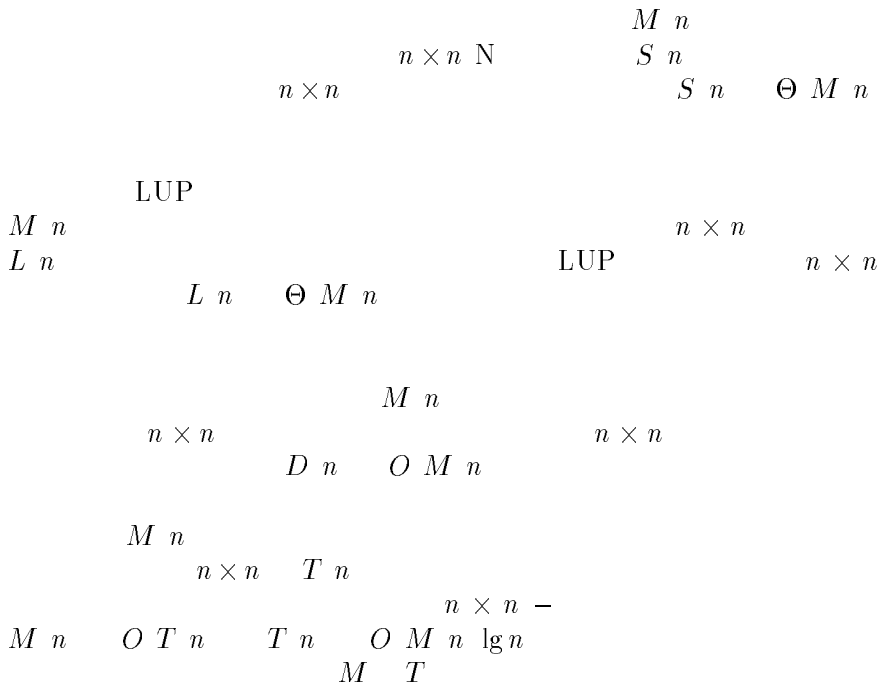
$$M_n \quad n^2$$

$$n^2$$

$$A^TA$$

$$A^{-1} \quad A^TA^{-1}$$

$$T_{\mathcal{A}}^{-1} = T_{\mathcal{A}}^{-1} \quad T_{\mathcal{A}}^{-1}$$



A^* conjugate transpose

$$A^T$$

$$A\ A^*$$

$$A \quad Ax \quad A \quad x \quad x^T Ax$$

LU-DECOMPOSITION

$$k \quad \text{leading submatrix}$$

$$k \quad A$$

$$x \quad A_k \quad A$$

$$A \quad \begin{pmatrix} A_k & B^T \\ B & C \end{pmatrix}.$$

$$x^T A_k x \quad \quad \quad \begin{pmatrix} A_k & B^T \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix}$$

$$\quad \quad \quad \begin{pmatrix} x^T \\ \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix}$$

$$\quad \quad \quad .$$

$$A_k \quad A \quad A$$

$$A \quad \begin{pmatrix} A_k & B^T \\ B & C \end{pmatrix}.$$

$$A_k \quad A \text{ Schur}$$

of A with respect to A_k

$$S = C - BA_k^{-1}B^T.$$

$$A_k$$

$$k$$

$$k-A$$

$$S$$

$$x$$

$$y-z$$

$$A_k$$

$$^T\begin{pmatrix}A_k&B^T\\B&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}$$

$$y^TB^Tz\quad z^TB y\quad Z^TCz$$

$$^{-1}B^Tz\quad ^TA_k\;y\quad A_k^{-1}B^Tz\quad z^T\;C-B A_k^{-1}B^T\;z,$$

$$.$$

$$z$$

$$y$$

$$T\qquad\qquad 1-T\qquad\qquad T$$

$$x_1,y_1\;,\;x_2,y_2\;,\ldots\;,\;x_m,y_m$$

$$x_i\;/\;x_j\qquad i\;/\;j\qquad y_i\\ F\;x$$

$$y_i\;-\;F\;x_i\;-\;\eta_i,\qquad\qquad\qquad.$$

$$i\qquad\qquad,\ldots,m\qquad\qquad\eta_i$$

$$\sum_{j=1}^n c_j f_j\;x\;.$$

$$\text{basic functions } f_j \\ f_j\;x\qquad\qquad x^j-$$

$$F\qquad\qquad\qquad n\;-\;$$

$$n \qquad \qquad \qquad c \qquad \qquad c_k$$

$$\begin{pmatrix} f_1\; x_1 & f_2\; x_1 & \ldots & f_n\; x_1 \\ f_1\; x_2 & f_2\; x_2 & \ldots & f_n\; x_2 \\ \\ f_1\; x_m & f_2\; x_m & \ldots & f_n\; x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F\; x_1 \\ F\; x_2 \\ \\ F\; x_m \end{pmatrix}$$

$$m$$

$$\text{approximation error}$$

$$\eta = \|Ac - y\|,$$

$$\eta = \left(\sum_{i=1}^m \eta_i^2\right)^{1/2}$$

$$\text{least squares}$$

$$\|Ac - y\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j - y_i \right)^2$$

$$c_k$$

$$\eta^2 = \sum^n_{i=1} \left(\sum^n_{j=1} \right)$$

$$A^T A c = A^T y,$$

$$\text{normal equation} \quad A^T A$$

$$A$$

$$A^T A^{-1}$$

$$c = A^T A^{-1} A^T y$$

$$A^+ y,$$

$$A^+ \quad A^T A^{-1}$$

$$\text{pseudoinverse} \quad A$$

$$Ac = y$$

ис. 31.1 31.3

$$\begin{aligned} (-1,2), (1,1), (2,1), (3,0), (5,3)\} & \quad (\\ & (\end{aligned} \quad ,$$

$$F\,x\qquad\qquad -\qquad\qquad x\qquad\qquad x^2,$$

$$\text{LU}\qquad\qquad A^TA\qquad\qquad A$$

$$\times \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad\qquad ac-b^2$$

$$\begin{aligned} A_k & \quad k- \\ & A \\ & A \qquad\qquad \text{LU-DECOMPOSITION } k- \\ & \det A_{k-1} \quad \det A_{k-1} \end{aligned} \qquad \text{LU}$$

$$\begin{aligned}
AA^+A &= A, \\
A^+AA^+ &= A^+, \\
AA^+{}^T &= AA^+, \\
A^+A{}^T &= A^+A.
\end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
n \times n & \qquad O \; n^{\lg 7} \\
& \qquad O \; \lg n
\end{aligned}$$

$$\textbf{a.} \qquad \qquad \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

XOR

$$\begin{aligned}
A \oplus B &= n \times n - \begin{pmatrix} C & AB \\ Q & A \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A'

$$\textbf{b.} \qquad \begin{matrix} C' & c'_{ij} & A'B \\ R & c_{ij} & c'_{ij} \end{matrix}$$

$$\textbf{c.} \qquad \begin{matrix} c_{ij} & c'_{ij} \\ C' & \lg n^2 \; \varepsilon \\ i & j \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c_{ij} & c'_{ij} \\ \varepsilon \; n^2 & c_{ij} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \; n^2 \\
& c_{ij} \\
& - \varepsilon
\end{aligned}$$

d.

k

$$A = \begin{pmatrix} & - & & & \\ - & & - & & \\ & - & & - & \\ & & - & - & \\ & & & - & - \end{pmatrix}.$$

$$\text{LU} \qquad A$$

$$T$$

$$A^{-1}$$

$$Ax = b$$

$$n \times n$$

$$A$$

$$O(n)$$

$$\text{LU}$$

$$A$$

$$Ax$$

$$b$$

$$n \times n$$

$$A$$

$$O(n)$$

$$\text{cubic splines}$$

$$n$$

$$x_i, y_i$$

$$i$$

$$, \dots, n$$

$$x_0$$

$$x_1$$

$$\cdots$$

$$x_n$$

$$x$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + f(x_i)$$

$$\text{knots}$$

$$x_i, \dots, x_n$$

$$f$$

$$f(x_i) = f_i, \quad y_i,$$

$$f(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad y_{i+1},$$

$$x_i, \dots, x_{n-1}$$

$$f'(x_{i+1}) = f'_i = f'_{i+1},$$

$$x_i, \dots, x_{n-1}$$

$$f''(x_{i+1}) = f''_i = f'_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$f''(x_0) = f'_0, \quad f''(x_n) = f''_n$$

natural cubic spline

b.

$$D_{i-1} = D_i = D_{i+1} = y_{i+1} - y_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

c.

$$D_0 = D_1 = y_1 - y_0, \quad D_{n-1} = D_n = y_n - y_{n-1}.$$

d.

$$D = (D_0, D_1, \dots, D_n)$$

e.

$$O(n)$$

f.

n

$$O \ n^{\lg 7}$$

$$n \qquad \Theta \ n \qquad \Theta \ n^2$$

Fast F

form FFT

polynomial $A \ x$ x
 nomial in the variable x over F

$$A \ x \qquad \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j.$$

$$a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1} \qquad F$$

coefficients

degree

 n polynombound n

$$A \ x \qquad B \ x$$

sum

 n

$$x \qquad F \qquad A \ x \qquad B \ x \qquad C \ x \qquad A$$

$$A \ x \qquad \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j,$$

$$B \ x \qquad \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j,$$

$$-x\qquad B\,x\qquad -x^3\qquad x-$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ & \mathbf{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{array}$$

$$C\,x\qquad\qquad\qquad A\,x$$

$$\sum_{j=0}^{n-2} c_j x^j, \qquad \qquad \qquad .$$

$$b_{j-k} \cdot \qquad \qquad \qquad .$$

$$A\quad \text{degree } B\; .$$

$$-\qquad\qquad\qquad \begin{array}{cc} m & n \\ & m\quad n \end{array}$$

$$O\; n$$

$$\Theta\; n\lg n$$

$$n \qquad \Theta \; n \lg n$$

$$A \; x \qquad \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

$$a \qquad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \quad \text{coefficient representation}$$

$$A \; x \qquad x_0 \quad \text{evaluating the polynomial at}$$

$$\Theta \; n$$

rule

$$A \; x_0 \qquad a_0 \quad x_0 \; a_1 \quad x_0 \; a_2 \quad \cdots \quad x_0 \; a_{n-1} \quad .$$

$$\Theta \; n$$

$$a \qquad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \qquad b \qquad b_0, b_1, \ldots, b_n$$

$$c \qquad c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$$

$$j \qquad , \quad , \ldots , n -$$

$$n$$

$$\Theta \; n^2$$

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$\text{convolution}$$

$$b$$

$$c \qquad a \otimes b$$

$$n$$

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

$$n$$

$$n$$

$$x_0, y_0 \; , \; x_1, y_1 \; , \ldots , \; x_{n-1}, y_{n-1} \quad ,$$

$$y_k \qquad A \; x_k$$

$$k \qquad , \quad , \ldots , n -$$

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

$\Theta \ n^2$

$A \ x$

$\Theta \ n$

$O \ n \lg n$

interpolation

$x_0, y_0 \ , \ x_1, y_1 \ , \dots, \ x_{n-1}, y_{n-1}$

x_i

n

y_k

$A \ x_k$

$A \ x$

$n -$

$x_0^2 \quad \dots \quad x_0^{n-1}$

$x_1^2 \quad \dots \quad x_1^{n-1}$

$x_{n-1}^2 \quad \dots \quad x_{n-1}^{n-1}$

$\left(\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{array} \right)$

$\left(\begin{array}{c} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{array} \right)$

.

Vandermonde

$V \ x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$

$\prod_{j \neq k} x_k - x_j \ ,$

a_j

$a \quad V \ x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \ ^{-1} y.$

$O \ n^3$

$A \ x$

$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k} x - x_j}{\prod_{j \neq k} x_k - x_j}.$

.

$$n \qquad A \ x_k \qquad y_k \qquad k$$

$$A$$

$$n \qquad O \ n$$

$$A \ x$$

$$x_0,y_0 \ , \ x_1,y_1 \ , \ldots, \ x_{n-1},y_{n-1} \quad ,$$

$$B$$

$$x_0,y_0' \ , \ x_1,y_1' \ , \ldots, \ x_{n-1},y_{n-1}' \quad ,$$

$$A \ B$$

$$C \ x$$

$$x_0,y_0 \quad y_0' \quad x_1,y_1 \quad y_1' \quad \cdots \quad x_{n-1},y_{n-1} \quad y_{n-1}'$$

$$\begin{array}{r}
 \Theta \ n^2 \\
 \Theta \ n \lg n \\
 \Theta \ n \lg n \\
 \Theta \ n
 \end{array}$$

ис. 31.2 32.1

$$A\left(x\right) =B\left(x\right)$$

$$n$$

$$\begin{array}{l} A\left(x\right) =B\left(x\right) \\ C\left(x\right) \end{array}$$

$$\Theta\left(n\right)$$

$$\Theta\left(n\lg n\right)$$

$$\Theta\left(n\lg n\right)$$

$$B\left(x\right) =x^3-x$$

$$\begin{array}{l} A\left(x\right) \\ A\left(x\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} q\left(x\right) \\ r \end{array}$$

$$A\left(x\right) =q\left(x\right) -x$$

$$A\left(x_0\right) =r$$

$$\begin{array}{l} q\left(x\right) \\ A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A\left(x\right) =\sum_{j=0}^{n-1}a_jx^j \\ A^{\text{rev}}\left(x\right) =\sum_{j=0}^{n-1}a_{n-1-j}x^j \end{array}$$

$$\text{ис. 31.3} \quad 32.2 \quad \omega_8^0, \omega_8^1, \ldots, \omega_8^7 \quad , \quad \omega_8 = \quad 8 \quad .$$

$$A \quad B \quad n$$

$$\text{Cartesian sum} \quad A \quad B$$

$$C \quad x \quad y \quad x \in A \quad y \in B \quad .$$

$$C \quad C \quad n$$

$$4 \quad B \quad \Theta \quad n \lg n \quad A \quad B \quad n$$

$$O \quad n \lg n$$

$$\text{unity} \quad n \quad \omega \quad \text{complex } n\text{th root of}$$

$$\omega^n \quad .$$

$$e^{2\pi i k \frac{n}{n}} \quad k \quad , \quad , \ldots , n - \quad n$$

$$e^{iu} \quad \cos u \quad i \sin u \, .$$

$$\omega_n \quad e^{2\pi i \frac{\quad}{n}} \quad .$$

$$\text{principal } n\text{th root of unity} \quad n \quad \text{the}$$

$$n$$

$$\omega_n^j \omega_n^k \quad \mathbb{Z}_n, \quad \omega_n^{j+k} \quad \omega_n^{(j+k) \bmod n} \quad \omega_n^n \quad \omega_n^0 \quad \omega_n^{-1}$$

$$n \qquad k \qquad d$$

$$\omega_{dn}^{dk} \qquad \omega_n^k.$$

$$\omega_{dn}^{dk} \qquad e^{2\pi i \; dn \; dk} \qquad e^{2\pi i \; n \; k} \qquad \omega_n^k.$$

$$n$$

$$\omega_n^{n-2} \qquad \omega_2 \qquad - \qquad .$$

$$n \qquad n \qquad n$$

$$n$$

$$\omega_n^k \qquad \omega_n^{k+n-2}$$

$$n$$

$$n$$

$$n$$

$$n$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{k-j} \qquad .$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{k-j} \qquad \frac{\omega_n^{k-n}-}{\omega_n^k-} \qquad \frac{\omega_n^{n-k}-}{\omega_n^k-} \qquad \frac{k-}{\omega_n^k-}$$

$$k$$

$$\begin{array}{ccc} n & & n \\ \dots, \omega_n^{n-1} & & \\ & m & m \\ & n & \\ & n & \end{array}$$

$$a \qquad a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$$

$$y_k = A \, \omega_n^k \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}.$$

$$\begin{array}{ccc} \dots, n- & & \\ y_0, y_1, \dots, y_{n-1} & & - \\ (Discrete\ Fourier\ Transform,\ DFT) & & a \\ -1 & y = \text{DFT}_n\ a & \end{array}$$

$$\text{Transform}\quad \text{FFT}$$

$$\Theta\;n^2$$

$$A$$

$$A\,x = A^0\,x^2 + xA^1\,x^2\,,$$

$$0\,x = a_0 + a_2x + a_4x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n/2-1},$$

$$1\,x = a_1 + a_3x + a_5x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n/2-1}.$$

$$A\,x = \omega_n^0\,\omega_n^1\,\ldots\,\omega_n^{n-1}$$

$$A^0 = A^1$$

$$2,2,\ldots,1,2,\ldots,1,2$$

$$a \quad a_0, a_1, \dots, a_n$$

textsc Recursive FFT \$ a \$

\$n \leftarrow \text{length } a\$ \$ \quad \text{quad } \\$n\$

if \$n\$ \$

quad then return \$a\$

\$ \omega_n \leftarrow e^{-2\pi i/n}\$

\$ \omega \leftarrow \$

\$a \leftarrow a[0] + \omega a[n/2] + \dots + \omega^{n/2} a[n-1]\$

\$a \leftarrow a[0] + \omega a[n/2] + \dots + \omega^{n/2} a[n-1]\$

\$y \leftarrow \text{textsc Recursive FFT } \\$a\$

\$y \leftarrow \text{textsc Recursive FFT } \\$a\$

for \$k \leftarrow 0\$ to \$n/2 - 1\$ \$

quad do \$y[k] \leftarrow y[k] + \omega^{kn} y[n-k]\$

quad \$y[k] \leftarrow y[k] - \omega^{kn} y[n-k]\$

quad \$ \omega \leftarrow \omega \omega_n\$

return \$y\$

RECURSIVE-FFT

$$y_0 = a_0 \omega_1^0 = a_0 = a_0.$$

$$A^0 = A^1$$

$$\omega = \omega$$

$$\omega_n^k$$

$$y_k^0 = A^0 \omega_n^{k/2},$$

$$y_k^1 = A^1 \omega_n^{k/2},$$

$$\omega_n^{k/2} = \omega_n^{2k}$$

$$y_k^0 = A^0 \omega_n^{2k},$$

$$y_k^1 = A^1 \omega_n^{2k}.$$

$$k=0,1,\ldots,n-1\qquad y_{n-2},y_{n-2+1},\ldots,y_{n-1}$$

$$\begin{aligned} y_{k+(n-2)} &= y_k^0 - \omega_n^k y_k^1 \\ y_k^0 &= \omega_n^{k+(n-2)} y_k^1 \\ A^0 \omega_n^{2k} &= \omega_n^{k+(n-2)} A^1 \omega_n^{2k} \\ A^0 \omega_n^{2k+n} &= \omega_n^{k+(n-2)} A^1 \omega_n^{2k+n} \\ A \omega_n^{k+(n-2)} &= \end{aligned}$$

$$\omega_n^n \omega_n^{k+(n-2)} = \omega_n^k. \qquad \omega_n^{2k} \omega_n^{2k+n}$$

$$\text{RECURSIVE-FFT}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \text{RECURSIVE-FFT} \\ \Theta(n) \qquad n \end{array}$$

$$T(n)$$

$$T(n) = T(n) + \Theta(n) = \Theta(n \lg n) .$$

$$\Theta(n \lg n) \qquad n \qquad n$$

$$y = V_n a = V_n \omega_n$$

$$\left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \omega_n^3 & \omega_n^6 & \omega_n^9 & \cdots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \omega_n^{3(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl}
 V_n^{-1} & a & \text{DFT}_n^{-1} \, y \\
 & V_n & y \\
 & j, k & V_n^{-1} \qquad \omega_n^{-kj} \, n \\
 & V_n^{-1} V_n & I_n \qquad I_n \qquad n \times \\
 & & j, j' & V_n^{-1} \\
 & V_n^{-1} V_n & j j' \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-kj} \, n \qquad \omega_n^{kj'} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{k(j'-j)} \, n. \\
 & & j & j' \\
 j-j' & & - \, n - & \leq j' - j \leq n \\
 & n & j \, / \, j' \\
 & V_n^{-1} & a \qquad \text{DFT}_n^{-1} \, y \\
 & a_j & - \sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-kj} \, , \\
 j & , \, , \, \dots , n - \\
 & a & y \qquad \omega_n \qquad \omega_n^{-1} \\
 & & n \\
 \text{DFT}_n^{-1} & & \Theta \, n \lg n \\
 & & \\
 \Theta \, n \lg n & & \\
 & a & b \qquad n \qquad n
 \end{array}$$

$$\mathrm{DFT}_n^{-1}$$

$$\Theta~n\lg n$$

$$n$$

$$\begin{array}{ccccc} & & n & & \\ \mathbb{C} & & \mathbb{Z}_m & & m \\ 2 & & t & & \\ & \omega_n & t & & \end{array}$$

$$n\lg n$$

$$z_0,z_1,\ldots,z_{n-1}\\ P\,x$$

$$\mathfrak{z}$$

$$O~n\lg n\\ a$$

$$x-a$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}a_jz^{jk} \qquad \begin{array}{c} a \\ y \\ z \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \\ y_0,y_1,\ldots,y_{n-1} \end{array} \qquad a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$$

$$n\lg n \qquad \qquad \qquad z$$

$$y_k = z^{k^2-2} \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{j^2-2} = z^{-(k-j)^2-2} \; ,$$

$$\geq n$$

$$\mathbf{for}$$

Рис. 31.4 32.3

, ω_n^k

y

,

Рис. 31.5 32.4

s $\lg n$

leftarrow \$ to \$ $\lg n$ \$

o for \$k\$ leftarrow \$ to \$n\$ \$ by \$ \$s\$

do \$ \$s\$ \$

ad \$A\$ k k s \$ \$A\$ k s k s \$

ad \$ \$s\$ \$A\$ k k s \$

or

RECURSIVE-FFT

y^0



$$n$$

$$O\left(\frac{n^c}{n^{\log_2 3}}\right) \qquad n$$

Toeplitz matrix

$$a_{ij} \qquad n \times n \qquad a_{ij} \qquad a_{i-1,j-1}$$

$$j \qquad , \qquad , \dots , n$$

$$a$$

b

$$n \times n$$

$$O\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$\frac{n^c}{n \times n} \qquad n \qquad O\left(\frac{n}{n} \lg n\right)$$

b

d

$$n \times n$$

$$A\left(\frac{x}{x}\right)$$

$$n$$

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$$

$$x_0$$

a

$$A\left(\frac{x}{x}\right)$$

$$b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$$

$$x - x^0$$

$$A\left(\frac{x}{x}\right) \qquad \sum_{j=0}^{n-1} b_j \left(\frac{x}{x} - x_0\right)^j,$$

$$A\left(\frac{x}{x}\right)$$

$$x_0$$

$$O\left(\frac{n}{n}\right)$$

b

$$b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$$

$$A\left(\frac{x_0}{x_0}\right) \qquad \omega_n^k \qquad k \qquad , \qquad , \dots , r$$

c

$$A\left(\frac{x_0}{x_0}\right) \qquad \omega_n^k \qquad \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\omega_n^{kr}}{r!} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{j}\right) g\left(\frac{r}{r}\right) - \right.$$

$$f\left(\frac{j}{j}\right) \qquad a_j \cdot j!$$

$$A\,x_0\,\omega_n^k\qquad k\qquad,\,\,\,\dots,\,n-\\A\,x$$

$$O\;n\lg n$$

$$O\;n\lg n$$

$$O\;n\lg^2 n$$

$$x^3\quad x^2\,-\,x$$

$$x\qquad\qquad\qquad\text{mod}\;x^2\quad x\qquad\qquad\qquad x-\;.$$

$$A\,x\qquad\qquad\qquad\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k\\,x_{n-1}\qquad\qquad\qquad n$$

$$-1\qquad\qquad\qquad\leq\;i\;\leq\;j\;\leq\;n-\;$$

$$\prod_{k=i}^j x-x_k\qquad Q_{ij}\qquad A\,x\quad\text{mod}\;P_{ij}\;x\\Q_{ij}\;x\qquad\qquad\qquad j-i$$

$$x\quad\text{mod}\;x-z\qquad A\,z\qquad\qquad\qquad z$$

$$_k\,x\qquad A\,x_k\qquad\qquad Q_{0,n-1}\,x\qquad A\,x$$

$$_k\,x\qquad Q_{ij}\,x\quad\text{mod}\;P_{ik}\,x\qquad Q_{kj}\,x\qquad Q_{ij}\,x\\j$$

$$A\,x_0\qquad A\,x_1\qquad\qquad\qquad A\,x_{n-1}$$

k $\lg n$ k $O \lg n$ g $\mathbb{Z}_k$ b w c $O \ n \lg n$ O d $, , , , , , ,$ a $\mathbb{Z}_k^*$

33 Теоретико-числовые алгоритмы

$a_1, a_2, \dots, a_k$ polynomial
time algorithm
 $\lg a_1, \lg a_2, \dots, \lg a_k$

bit operations
 $\beta -$
 $\Theta(\beta^2)$
 $\beta -$
 $\Theta(\beta^2)$
”
 $\beta -$
 $\Theta(\beta^{\lg_2 3})$
 $\Theta(\beta \lg \beta \lg \lg \beta)$
 $\Theta(\beta^2)$

$$\mathbb{Z}_n \qquad , \qquad , \dots , n - \qquad .$$

common divisors a

greatest common

$$\gcd \, a, b \qquad a, b$$

$$a \qquad b$$

$$d \mid b \qquad d \mid a \mid b \qquad d \mid a - b \; .$$

$$d \mid a \mid d \mid b \qquad d \mid ax \mid by \; ,$$

$$a \mid b \qquad a \leqslant b \qquad b$$

$$a \mid b \mid b \mid a \qquad a \mid \pm b.$$

$$\gcd \, a, b \qquad \gcd \, b, a$$

$$\gcd \, a, b \qquad \gcd \, -a, b \; ,$$

$$\gcd \, a, b \qquad \gcd \, a \; , \; b \; ,$$

$$\gcd \, a, \qquad a \; ,$$

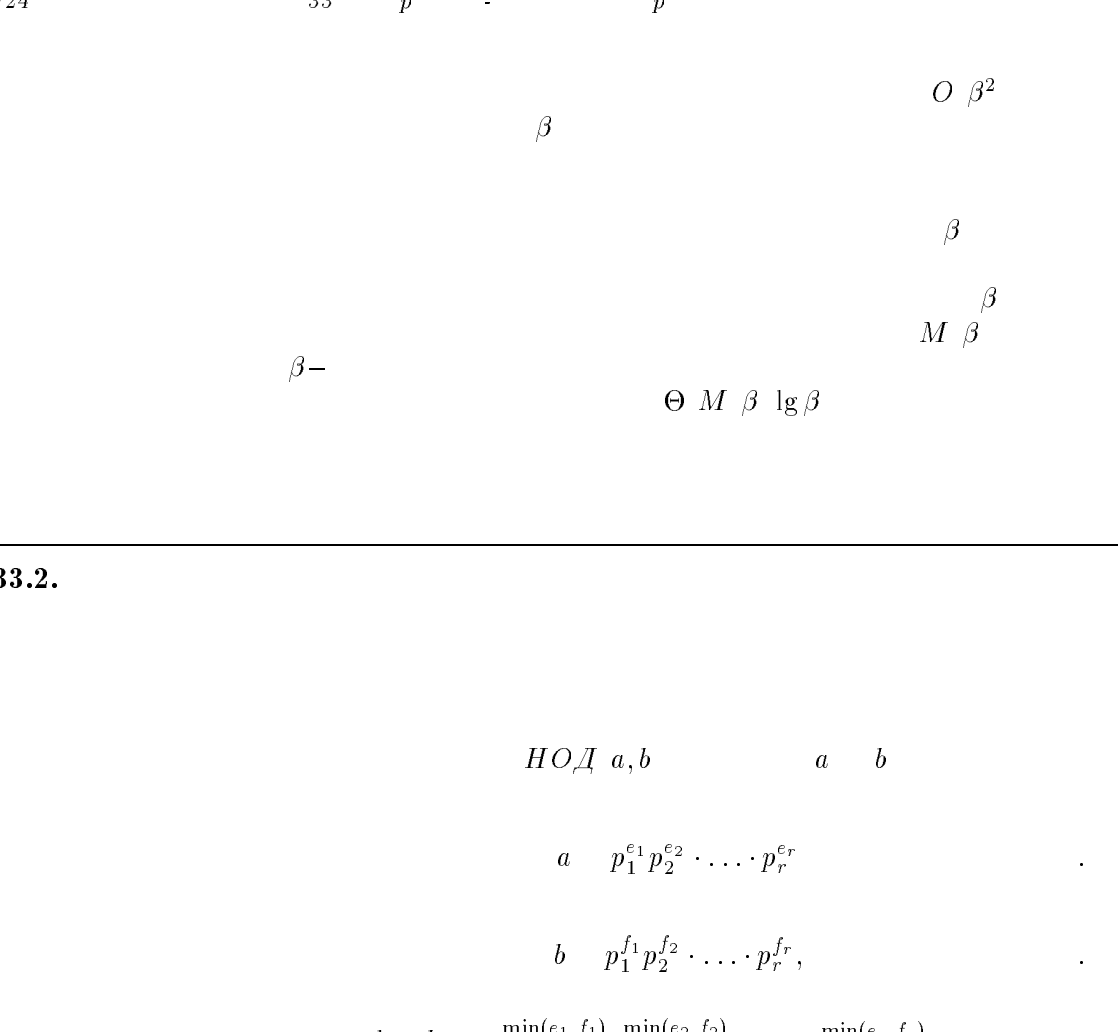
$$ka \qquad a \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

$$a \mid b$$

$$\in \mathbb{Z}$$

$$s \qquad ax \qquad by \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
& b & & \gcd\, a,b & s & & \gcd\, a,b \\
a & & b & & s & ax & by \\
& & & \gcd\, a,b \leq s & & & \\
\gcd\, a,b \leq s & & & \gcd\, a,b \leq s & & & \gcd\, a,b \leq s
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccccccc}
& & & \gcd\, a,b & & & a \\
& & & & & & \\
& & a & b & & & \\
n & & \gcd\, an,bn & n\gcd\, a,b & & & \\
& & anx & bny & & & \\
& ax & by & n & & & \\
& & & & & n & a & b & n & ab \\
\gcd\, a,n & & n & b & & & & & &
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccccccc}
& & a & b & & & \text{are relatively prime} \\
\gcd\, a,b & & & & & & \\
& \gcd\, a,p & & \gcd\, b,p & & HO\mathcal{A}\, ab,p & \\
& & a,b,p & & & & \\
y' & & & & & & x\, y\, x \\
& & & & & & \\
& & ax & py & , & & \\
& & bx' & py' & . & &
\end{array}
\end{array}$$



od b

CLID , EUCLID .

LID

a EUCLID a, b

$\text{mod } a$

D

F_k

EUCLID a, b
 $F_{k+2} \quad b \quad F_{k+1}$

b

$a \quad F_3$
 $k -$

EUCLID a, b

$k -$

$b \quad F_{k+1}$

b
 $a \quad b$
 $a \quad b \quad a \text{ mod } b$

$a \quad b \quad b$
 k

-1
 $E_1 \quad H O \wedge E_1 \quad E_1 \quad$

Рис. 33.1 33.1: EXTENDED-EUCLID (99, 78) (99, 78)
 EXTENDED-EUCLID(99, 78) (3, -11, 14),
 $HOД(99, 78) = 3 = 99 \cdot (-11) + 78 \cdot 14$.

EUCLID F_{k+1}, F_k $k -$
 F_k $\varphi^k - \varphi -$
 EUCLID a, b $a - b$ $O \lg b$
 β EUCLID $O \beta$
 $\beta -$ $O \beta^3$ $O \beta^2$
 $O \beta^2$
 EUCLID

$x - y$
 $d = HOД(a, b) = ax + by$
 $x - y$

EXTENDED-EUCLID d, x, y

```

Extended Euclid a b
  if b
    then return a
    d x y gets Extended Euclid b a mod b
    d x y gets d y x lfloor a b rfloor y
  return d x y

```

EXTENDED-EUCLID
 EUCLID b , EXTENDED-EUCLID d
 $x y$ $d a ax by$
 $b / d' HOД(b, a \bmod b) d', x', y$
 $d' bx' a \bmod b y'$
 $d' d x y$

$$b\,x' - a\,b\,y' = x\,y'$$

$\gcd a_t, b_t$
 t
 $\lg k$
 a_i
 b_i
 n_i

33.3.

n

$, \dots, n -$

n

S
 $\oplus$

group
 closure $a \oplus b \in S$
 $a, b \in S$

$e \in S$
 $e \oplus a$
 $a \oplus e$
 a
 $a \in S$

identity
 e
 $e \cdot e'$
 e

e
 e'

associativity
 $a \oplus b \oplus c$
 $a \oplus b \oplus c$

$a, b, c \in S$

S
 inverses
 $a \in$

$b \in S$
 $a \oplus b$

$b \oplus a$
 e

a
 $-a$

abelian
 $a, b \in S$

$a \oplus b$
 $b \oplus a$

finite

n

n

n

a_n
 b_n
 a
 b_n
 $a_n \cdot_n b_n$
 ab_n

n

n

n
 additive group mod

ulo n
 $n, \dots, n -$
 $\mathbb{Z}$

ис. 33.2 33.2 (a) 6 $(\mathbb{Z}_6, +_6)$. (b)

15 $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot_{15})$.

$\mathbb{Z}_n, \cdot_n$

n

n

a a_n $-a$

$-a_n$ $n - a_n$

n mutiplicative group modulo n

$\mathbb{Z}_n^*$ $\mathbb{Z}_n$

n

$HO\mathcal{A} \ a, n$ $HO\mathcal{A} \ a \ kn, n$

n b

$\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n$

a d, x, y

EXTENDED-EUCLID a, n $a \in \mathbb{Z}_n^*$

$d \ HO\mathcal{A} \ a, b$ $ax \ ny$

$x \equiv \pmod n$ x_n

a_n $\mathbb{Z}_{n, \cdot n}^*$

$x \ x'$

$a \ x \oplus a \oplus x' \ e \oplus x' \ x'$

$x \oplus a \oplus x' \ x \oplus e \ x$

n $\mathbb{Z}_n \ \mathbb{Z}_n^*$

a $a^{-1} \bmod n$

$b \ \mathbb{Z}_n^*$ $ab^{-1} \bmod n$ $\mathbb{Z}_{15}^*$

$-1 \equiv \pmod$ $\equiv \equiv \pmod$

$\equiv \cdot \equiv \pmod$

$\mathbb{Z}^*$ $\langle 2, n$ $\langle 2$

$$\varphi\,n\,=\,n\left(-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{p_s}\right),$$

$$p_1,\ldots,p_s\qquad\qquad\qquad t\qquad\qquad\qquad n$$

$$p_1\qquad\qquad\qquad p_1\qquad\qquad\qquad -\qquad\qquad\qquad p_1$$

$$p_2\qquad\qquad\qquad -\qquad\qquad\qquad p_2$$

$$\varphi\qquad\qquad\qquad -\qquad\qquad\qquad -$$

$$\varphi\,p\,=\,p-1,$$

$$, \, , \, \ldots , p-1 \qquad\qquad\qquad p$$

$$\varphi\,n\,=\,n-1$$

$$S, \oplus \qquad\qquad\qquad S' \subseteq S \qquad\qquad\qquad S', \oplus$$

$$S', \oplus \qquad\qquad\qquad \text{subgroup}$$

$$S, \oplus$$

$$S, \oplus \qquad\qquad\qquad S' \subset S \qquad\qquad\qquad a \oplus b \in S'$$

$$a, b \in S' \qquad\qquad\qquad S', \oplus \qquad\qquad\qquad S, \oplus$$

$$, \, , \, , \, \subseteq \mathbb{Z}_8$$

$$\mathbb{Z}_8$$

$$S', \oplus \qquad\qquad\qquad S, \oplus \qquad\qquad\qquad S$$

$$S$$

$$S$$

$$x \oplus S'$$

$$S'$$

$$S' \qquad\qquad\qquad S$$

$$\text{proper}$$

$$S'$$

$$\text{Clique}$$

S

$$e,a,a\oplus a,a\oplus a\oplus a,\ldots$$

$$a^{(0)}\quad e\quad a^{(1)}\quad a\quad a^{(2)}\quad a\oplus a\quad a^{(3)}\\ a^{(i)}\oplus a^{(j)}\quad a^{(i+j)}$$

 $(i+1)$

$$a^{(i)}\cdot a^{-1}\quad a^{(i-1)}$$

 S

$$e,a,a\oplus a,a\oplus a\oplus a,\ldots$$

 -1

$$e\quad a^{(0)},a^{(1)},a^{(2)},\ldots,a^{(n-1)},a^{(t)}\quad e,\ldots$$

 t

$$a^{(t)}\quad e$$

order

 a

ord a

 n

a subgroup

 $\gamma\,a$
 a

$$a\,,\oplus$$

 a
 a

generates

 a
 $\mathbb{Z}_6$
 $,\,,$
 $\mathbb{Z}_6$
 $,\,,\,,\,,\,,$
 $\mathbb{Z}^*$
 $,\,,$

$$a^{(i)}\qquad a^{(i)}\qquad a^{(i\bmod t)}\qquad i$$

$$a^{(|S|)}S,\oplus\qquad e\qquad a\in S$$

$$a^{(|S|)}e.$$

$$t\quad ord\,a\qquad ord\,a\quad S\qquad S\equiv\quad\bmod t$$

$$\mathbb{Z}_{5}^*,\,_{5}\qquad\qquad\qquad\mathbb{Z}_{4}^*,\,_{4}$$

$$\alpha$$

$$a\quad b\equiv c\mod$$

$$\alpha\,a\cdot\alpha\,b\equiv\alpha\,c$$

$$\bmod$$

$$p\qquad\varphi\,p^k\qquad p^{k-1}\,p-\qquad k$$

$$n\qquad a\in\mathbb{Z}_n^*\qquad f_a\,x\qquad ax\bmod n\qquad f_a\,\,\mathbb{Z}_n^*\rightarrow\mathbb{Z}_n^*$$

$$\mathbb{Z}_n^*$$

$$\mathbb{Z}_9\quad\mathbb{Z}_{13}^*$$

33.4.

$$ax\equiv b\mod n\;, \qquad\qquad\qquad.$$

$$a\,b\,n$$

$$x\quad n$$

$$\mathbb{Z}_n$$

$$n$$

$$a,b\in\mathbb{Z}_n$$

$$x\in\mathbb{Z}_n$$

$$ax\quad b\mod n$$

$$a$$

$$\mathbb{Z}$$

$$a$$

$$\frac{a}{n}$$

$$a \equiv d \pmod{n}, d, \dots, n-d \equiv -d \pmod{n}.$$

$$a \equiv nd,$$

$$\gcd(a,n)$$

$$\begin{aligned} d, x', y' \\ \begin{aligned} &ax' \equiv d \pmod{n} \\ &ny' \equiv d \pmod{n} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$ax \equiv b \pmod{n} \iff \text{HOD } a, n \mid b$$

$$\mathbb{Z}_n \quad ax \equiv b \pmod{n} \iff d \mid \gcd(a,n)$$

$$a \mid b \iff \begin{aligned} &ax \equiv b \pmod{n} \\ &ax \equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$

$$n-d \equiv nd \pmod{n} \iff ax \equiv b \pmod{n}$$

$$\begin{aligned} d \mid \gcd(a,n) \iff ax' \equiv ny' \pmod{n} \\ \text{EXTENDED-EUCLID} \end{aligned}$$

$$ax' \equiv d \pmod{n} \iff ax_0 \equiv ax' b \pmod{n} \iff d \mid b \pmod{n}$$

$$ax \equiv b \pmod{n} \iff d \mid \gcd(a,b) \iff \mathbb{Z}$$

$$n \mid d \qquad ax$$

$$n$$

$$a \mid b \qquad n$$

$$\text{mod } n$$

Modular Linear Equation Solver

```

    d = x * y    gets Extended Euclid
    if d == b
        then x    gets x = b / d
            for i gets 1 to d
                do print x * i
    else print "

```

$$n \qquad x \qquad \text{Ex}$$

$$d, x, y \qquad , - ,$$

$$- \cdot \qquad \text{mod}$$

$$\text{MODULAR-LINEAR-}$$

$$O(\lg n) \quad HOA(a, n)$$

$$O(\gcd(a, n))$$

$$n \qquad \gcd(a, n) \qquad \mathbb{Z}$$

$$b$$

$$x \qquad n \text{ multiples}$$

$$\mathbb{Z}_n^*$$

$$n \qquad \gcd(a, n)$$

$$ax \equiv$$

$$\mathbb{Z}_p^*$$

$$O(\lg n)$$

$$\begin{array}{rcll}
 f\,x & \equiv f_0\,f_1x\,\cdots\,f_tx_t & \text{mod } p & \\
 & f_i\in\mathbb{Z}_p & p & a\in\mathbb{Z}_p \\
 \text{zero} & f & f\,a & \equiv \text{mod } p \\
 a & f & & \\
 t- & f\,x & \equiv x-a\,g\,x & \text{mod } p \\
 & t & t & \mathbb{Z}_p \\
 & & & g\,x
 \end{array}$$

33.5.

Sun Tsŭ

k

k

n

$n_1n_2\cdots n_k$

$\mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}_{n_1}\times\mathbb{Z}_{n_2}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_k}$

$\mathbb{Z}_{n_i}$

$\mathbb{Z}_n$

n

$n_1n_2\cdots n_k$

$n_1,n_2,\ldots,n_k$

$a\leftrightarrow a_1,a_2,\ldots,a_k$,

.

$a\in\mathbb{Z}_n$ $a_i\in\mathbb{Z}_{n_i}$ $a_i\equiv a\text{ mod }n_i$ $i=1,\ldots,k$

$\mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z}_{n_1}\times\mathbb{Z}_{n_2}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{n_k}$

$\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{l}
35 \qquad p \qquad - \qquad p \\
\\
ab \bmod n \leftrightarrow \quad a_1b_1 \bmod n_1, \, a_2b_2 \bmod n_2, \ldots, \\
\\
\mathbb{Z}_n \\
n \\
n \\
n_i \qquad n_i \, n \\
n \, n_i \qquad i \qquad , \, , \ldots , k \qquad m_i \qquad n_1n_2 \ldots n_i \\
m_i \equiv \qquad \bmod n_j \qquad i \, / \, j \\
c_i \qquad m_i \, m_i^{-1} \bmod n_i \\
j \, / \, i \qquad , \, , \ldots , k \qquad c_i \equiv \qquad \bmod n \, i \qquad c_i \equiv \\
c_i \leftrightarrow \qquad , \, , \ldots , \, , \, , \ldots , \, . \\
a \equiv \, a_1c_1 \, \, a_2c_2 \, \, \ldots a_kc_k \qquad \bmod n \\
a \\
\mathbb{Z}_n \\
n \qquad n_1n_2 \ldots n_k \\
a \qquad a'
\end{array}$$

ис. 33.3 33.3

: $n_1 = 5, n_2 = 13$.
13, -

$$0 \quad 65 - 1$$

,

$$i \quad , \quad , \dots , k$$

$$a \equiv \quad \text{mod} \quad ,$$

$$a \equiv \quad \text{mod} \quad .$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_3 & n_1 & m_2 & n_2 & m_1 & \\ n & & -1 & \equiv & \text{mod} & -1 & \text{mod} \end{array}$$

$$c_1 \equiv \quad \text{mod} \quad ,$$

$$c_2 \equiv \quad \text{mod} \quad ,$$

$$\begin{array}{l} a \equiv \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{mod} \\ \equiv \quad \text{mod} \\ \equiv \quad \text{mod} \end{array} .$$

$$x \quad \quad x \equiv \quad \text{mod} \quad \quad x \equiv \quad \text{mod}$$

$$x$$

$$\gcd a, n$$

$$\begin{array}{c}
\mathbb{Z}_n^* \\
a \\
a^0, a^1, a^2, a^3, \dots \\
a^i \bmod n \qquad i \\
a^i \bmod n \qquad i \\
\mathbb{Z}_n^* \qquad a \qquad \text{ord}_n a \qquad \mathbb{Z}_7^* \qquad \text{ord}_7 \\
\varphi - \\
n \\
a^{\varphi(n)} \equiv \qquad \bmod n \ . \\
a \in \mathbb{Z}_n^* \\
p \\
a^{p-1} \equiv \qquad \bmod p \ . \\
a \in \mathbb{Z}_p^* \\
p \qquad \varphi p \qquad p - \qquad \mathbb{Z}_p \\
a^p \equiv a \bmod p \qquad a \qquad p \\
\text{ord}_n g \qquad \mathbb{Z}_n^* \qquad \mathbb{Z}_n^* \qquad \text{primitive root} \\
g \qquad g \qquad \text{generator} \qquad \mathbb{Z}_n^* \\
\mathbb{Z}_n^* \qquad \mathbb{Z}_n^*
\end{array}$$

$x^2 \equiv \pm 1 \pmod n$
 nontrivial square root of ± 1 modulo n

$1 \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_n$

n

RSA

repeated squaring

$$a^b \bmod n$$

$n \mid b$

$$b_1, b_2, \dots, b_k$$

k

i	
b_i	
c	
d	

Рис. 33.4 MODULAR-EXPONENTATION $a = 7, b = 560 =$
 $\langle 1000110000 \rangle$ $n = 561.$
for. 1.

$$\mathbb{Z}_{11}^*$$

$$a^b \bmod n$$

$$b$$

$$a^{-1} \bmod n \quad a \in \mathbb{Z}_n^*$$

MODULAR-EXPONENTATION

$$\varphi n$$



encrypt
 communication channel
 eavesdropper
 decrypt

Пр. 33.5 33.5

P_A
 $C = P_A(M).$
 $S_A()$
 M
 $P_A(M)$

$M = S_A(C).$
 M

C
 $P_A.$

sign
 verify
 accept

Пр. 33.6 33.6

M'
 $\sigma = S_A(M')$
 $M' = P_A(\sigma).$

$(M', \sigma),$

M'

- digital signature σ
- $S_A(M')$
- M', σ
- M', σ
 $M' = P_A(\sigma)$

RS

cryptosystem

 n p d e^{-} P

key

 S

key

 $\mathcal{D}$
 $\mathbb{Z}_n$ e O S O β $\mathbb{Z}$

$$M \equiv S^{-1} P M \equiv M^{ed} \pmod{n}$$

$$\mathbb{Z}_n \qquad e \quad d$$

$$ed \leq k \leq p-1 \qquad q-1$$

$$k \leq M \not\equiv \pmod{p}$$

$$1 - 1/(n-1) \qquad 1/(n-1)$$

33 p - p

RSA

- one way M

$h(M)$

M

M'

$h(M)$

$h(M')$

$h(M)$

fingerprint

M

$h(M)$

RSA

M, S_A

$h(M)$

P_A

S_A

$h(M)$

$h(M)$

M

$h(M)$

$h(M')$

certificates

RSA

n

e

M

d

e

d

n

RSA

P_A

M_1

P_A

M_2

$\equiv$

P_A

$M_1 M_2$

$\pmod n$

$M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_n$

$\mathbf{Z}$

33.8.

bution function π

n

$\pi(n)$

π

prime distri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n \ln n} = 0.$$

$$55 \qquad p \qquad - \qquad p$$

$$n$$

$$n \quad p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r},$$

$$r \qquad p_1,p_2,\ldots,p_r$$

$$n$$

$$r \qquad e_1$$

$$\mathrm{sion}$$

$$\mathrm{trial\,div}$$

$$n \qquad , \qquad , \ldots , \qquad \overline{n}$$

$$n$$

$$\overline{n}$$

$$\Theta \quad \overline{n}$$

$$n$$

$$n \qquad \beta \qquad \lg \, n$$

$$\overline{n} \qquad \Theta \qquad \beta \cdot 2$$

$$n$$

$$n$$

$$n$$

$$\mathbb{Z}_n^+$$

$$n$$

$$\mathbf{Z}_n^+ \qquad , \qquad , \ldots , n - \quad .$$

$$n$$

$$\mathbb{Z}_n^+ \qquad \mathbb{Z}_n^*$$

$$n$$

$$a \quad \text{base } a \text{ pseud}$$

$$\text{prime}$$

$$a^{n-1} \equiv \qquad \text{mod } n \quad .$$

$$n$$

$$a \in \mathbb{Z}^+$$

$$a$$

n

PSEUDOPRIME

 β
 $\beta \rightarrow \infty$

-6

-13

 a
 n
 $a \in \mathbb{Z}^*$

```

d gets
for i gets k downto
  do x gets d
    d gets d cdot d bmod n
    if d $x ne $ $x ne n $
      then return true
    if b i
      then d gets d cdot a bmod n
  if d ne
    then return true
return false

```

$$a^{n-1} \bmod n$$

MODULAR-EXPONENTIATION

$$\begin{array}{c}
a \\
560 \equiv \quad \text{mod} \\
\text{MILLER-RABIN} \\
\text{MILLER-RABIN } s, n \\
\text{RABIN} \quad \text{PSEUDOPRIME} \quad \text{PSEUDOPRIME} \\
n \\
n \\
a \\
-s \\
n \\
n - \\
\left| a \in \mathbb{Z}_n^+ \quad \text{WITNESS } a, n \quad \text{TRUE} \right| \quad n - \\
a \in \mathbb{Z}_n^+ \quad \text{WITNESS } a, n \quad \text{FALSE} \\
n - \\
a \\
t^{n-1} \\
a \\
B \\
\mathbb{Z}_n^*
\end{array}
\begin{array}{c}
280 \equiv \quad \text{mod} \\
a \\
\text{WITNESS } \quad , \quad \text{TRUE} \\
s \\
n \\
\beta \\
O \ s \beta \\
s \\
n \\
\text{MILLER} \\
n \\
n \\
a \\
s \\
\mathbb{Z}_\gamma^- \\
n \\
n - \\
\mathbb{Z}_n^* \\
a^{n-1} \equiv \quad \text{mod } n \\
B \quad \mathbb{Z}_n^*
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & B & \\
 1: & x \in \mathbb{Z}_n^* & \\
 & x^{n-1} \not\equiv \quad \text{mod } n \enspace . & \\
 & B & b \in \mathbb{Z}_n^* \quad b^{n-1} \equiv \quad \text{mod } n \\
 B & & \cdot_n \\
 & \mathbb{Z}_n^* & \\
 & B & B \\
 2: & x \in \mathbb{Z}_n^* & \\
 & x^{n-1} \equiv \quad \text{mod } n & \\
 n & & \\
 n & & \\
 p^e & p & e \\
 & \mathbb{Z}_n^* & \\
 g & ord_n \, g & \mathbb{Z}_n^* \quad \varphi \, n \quad p - \quad p^{e-1} \\
 & & n - \equiv \quad \text{mod } \varphi \, n \\
 & & p \\
 & n & p^e \\
 n & & p \\
 & & n \\
 & n_1, n_2 & \\
 & n_2 & \\
 n - & & \\
 t & n - & {}^t u \quad u \\
 & a \in \mathbb{Z}_n^+ & \\
 & a & a^u, a^{2u}, a^{2^2u}, \dots, a^{2^tu} \enspace . \\
 & n &
 \end{array}$$

B
 B^4
 $\bmod n$
 $\equiv \pmod n$

Рис. 33.7 $33.7 \ \rho -$
 $1) \bmod 1387$

$$19. \left(\begin{matrix} \rho - \\ \cdot \end{matrix} \right)$$

$$HO_{\mathcal{A}}(63-177,1387)=19. \text{ (b)}$$

$$\text{. (a)} \qquad x_{i+1} = (x_i^2 - 1) \bmod 1387 = 19 \cdot 73.)$$

$$73 \qquad x_7 = 177 \qquad y = 63 \qquad \text{. (c)}$$

$$x \qquad k \qquad i \qquad , \ , \ , \dots$$

$$k \qquad x_i \qquad i \qquad y \qquad k$$

$$x_1, x_2, x_4, x_8, \dots$$

$$x_i, n \qquad y \qquad n \qquad x_i \qquad d \qquad \gcd y -$$

POLLARD-RHO

$$n$$

$$n \qquad \overline{s}$$

$$s$$

$$n$$

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow x^2 = \\
 \\
 \Theta = \overline{n} \\
 \\
 n = s \\
 \gcd(s, n) = s \\
 \\
 n \\
 x_i = s \\
 \\
 x'_i = x_i \bmod s \\
 \\
 x'_{i+1} = x'^2_i - \qquad \bmod s \;, \\
 \\
 n = s \\
 \\
 \Theta = \overline{s} \qquad x'_i \\
 \\
 s \\
 \\
 y \\
 x_i \\
 \\
 x_1, x_2, x_4, x_8, \dots \\
 \\
 \\
 \\
 \text{POLLARD-RHO} \qquad x_i \\
 y
 \end{array}$$

$$55 \qquad p \qquad - \qquad p$$

$$s$$

$$n$$

$$x_i \bmod p \qquad \qquad \qquad n \qquad pq \qquad p \\ x_i \bmod q$$

$$p$$

$$q$$

$$n$$

$$x_{i+1} \qquad \qquad \qquad x_i^2-c \mod$$

$$c$$

$$x_i$$

$$\overline{s}$$

$$\beta$$

$$n$$

$$\overline{n}$$

$$\beta$$

$$n^{1/4} \qquad \qquad \qquad \beta/4$$

$$n^{1/4}\beta^3 \qquad \qquad \qquad \beta/4\beta^3$$

$$\mathbf{a}$$

$$\text{POLLARD-RHO}$$

$$f:\mathbb{Z}_n\rightarrow\mathbb{Z}_n \qquad \qquad \qquad x_0\in\mathbb{Z}_n \\ x_i=x_{i-1}f(x_{i-1}) \qquad \qquad \qquad x_i=f(x_{i-1})$$

binary gcd algorithm

$$\begin{array}{llll}
 \text{a} & & \gcd a, b & \gcd a, b \\
 & a - b & & \\
 \text{b} & & a & b \\
 \gcd a, b & & & \gcd a, b \\
 \text{c} & & a - b & \gcd a, b \\
 \gcd a - b, b & & & \\
 \text{d} & & \gcd a, b & \\
 & & O \lg \max a, b &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{a} & & & a \\
 & b & O \lg q \lg b & q \\
 \text{b} & \mu a, b & \lg a \lg b & \\
 & & \text{EUCLID} & \\
 & \gcd a, b & & \gcd b, a \bmod b \\
 c \mu a, b - \mu b, a \bmod b & & c & \\
 \text{c} & & \text{EUCLID } a, b & \\
 O \mu a, b & & & \text{EUCLID} \\
 & \beta - & & O \beta^2
 \end{array}$$

$$F_n \quad n \quad n$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{a} & & & \\
 & n & & \\
 \text{b} & & O n & \\
 \text{c} & & F_n & O \lg n
 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$$

d

$$O\left(\beta^2\right)$$

$$\beta$$

p

$$a\in\mathbb{Z}_p^*$$

$$\mathbb{Z}_p^*$$

$$a$$

$$x^2\equiv a\pmod{p}$$

quadratic residue

$$\mathbb{Z}_p^*$$

$$p-$$

b

p

$$a\in\mathbb{Z}_p^*$$

Le

symbol

$$\left(\frac{a}{p}\right)$$

$$\left(\frac{a}{p}\right)$$

$$\mathbb{Z}_p^*\qquad\left(\frac{a}{p}\right)$$

–

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{(p-1)/2}\pmod{p}.$$

$$a\in\mathbb{Z}_p^*$$

c

p

k

$$a\in\mathbb{Z}$$

$$a^{k+1}\bmod p$$

a

p

p

$$a\in\mathbb{Z}_p^*$$

p

k

d

n

$$a\in\mathbb{Z}^*$$

$$\lg n \quad O(\lg \lg n)$$

$$n$$

RSA

$$c$$

$$\rho$$

$$n$$

$$n$$

$$n$$

$$L_n^{1+o(1)}$$

$$L_n e^{\sqrt{\ln n \ln \ln n}}$$

$$T = \sqrt{2} + o(1)$$

34

Поиск подстроки

$$x \quad y$$

$$O \quad n - m \quad m$$

$$T$$

$$O \quad n \quad m \quad \Sigma$$

$$\text{KMP}$$

$$O \quad m \quad n$$

34.0.1. Обозначения и терминология

$$\Sigma^*$$

$$\Sigma$$

empty str

$$\varepsilon$$

concatenation

$$x$$

$$x \quad y$$

$$xy$$

$$w$$

$$x$$

$$x \quad wy$$

$$y \in \Sigma$$

$$w$$

suffix

$$x$$

$$\begin{array}{rcccl}
 & S_k & S & ..k & \\
 & & & & S_0 \quad \varepsilon \quad S_r \quad S \\
 & & & & P \quad \quad \quad m \\
 & & & & s \\
 s \leqslant n - m & & P \sqsupset T_{s+m} & & T \\
 & & & & \leqslant
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & y & & \Theta & t & & t \\
 & & x & y & & & t \\
 & & & & & & t
 \end{array}$$

s

T b

Упражнения

T

P

NAIVE-STRING-MATCH

$O \ n \qquad n$

d

$m \quad n$

$$n - m \qquad \frac{-d^{-m}}{-d^{-1}} \leq$$

Σ

gap character

cabccbacbacab

c ab cc ba cb
ab $\diamond$ ba $\diamond$

c ab ccbac ba

$$\begin{aligned} \Theta &= n-m & m \\ & \Sigma & , \ , \ , \dots, \Sigma & d \\ & d & \Sigma & k \\ & & & k \\ P & \dots m & p & T \dots n \\ s & , \ , \dots, n-m & T_s & \dots s & m & s & p & O & n \\ & & p & O & m & t_i & t_s & O & n \\ & & & O & n & p \\ t_s & & p & O & m \\ p & P & m & P & m - & P & m - & \dots & P & P & \dots \\ & & O & m & t_0 & O & n - m & O \\ & & t_1, t_2, \dots, t_{n-m} & t_s & t_{s+1} \\ & & t_{s+1} & t_s - & m^{-1} T_s & T_s & m \\ & & T_s & \dots s & m & m^{-1} T_s & \dots s & m & t_s \\ & & T_s & T_s & m \\ & & m-1 & T_s & m \\ & & O \lg m & m - & O & m \end{aligned}$$

$$p \quad t$$

$$q$$

$$O \; n$$

$$, \quad , \quad , \cdots ,$$

$$t_{s+1}$$

h
 I

$$t_s \equiv p$$

$$t_s \not\equiv p$$

$$P \quad \mathbf{a}^m \quad T \quad \mathbf{a}^n_s$$

 $O\left(n\right)$

$$\Sigma^* \quad \mathbf{Z}_q$$

$$O\left(n+q\right) \\ p$$

 v
 O

$$\begin{array}{l} a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \\ b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} n \\ n \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \\ B \end{array}$$

$$q \qquad n \qquad x \in \qquad , \qquad , \ldots , q -$$

$$A\,x\,=\,\left(\sum_{i=0}^na_ix^i\right)\bmod q,$$

$$\begin{array}{l} A\,/\,B \\ A\,x\,=\,B\,x \\ A\,=\,B \end{array} \qquad \begin{array}{l} B\,x \\ A\,x\,=\,B\,x \end{array}$$

34.3.

$$P \qquad T$$

$$\Theta\,n \qquad !$$

$$\Sigma$$

input

 Q
 Σ q_0 δ δ, b

a

y

b

k

abaaa

, , , , ,

abbaa

• Σ

input alphabet

• δ $Q \times \Sigma \rightarrow Q$

transition function

 $\delta(q, a)$

q

a

 $q \in A$

accepts

 $q \in A$ M $\varphi: \Sigma^*$

final state function

 $\varphi(w)$

w

 φ φ $\varphi(\varepsilon) = q_0$ $\varphi(wa) = \delta(\varphi(w), a)$ $w \in \Sigma^*$

input	state
-------	-------

ababaca

 a
$$P$$

!

 $\dot{i}$
$$a$$
 $\delta \ i, a$

T abababacaba

 T_i $\varphi \ T_i$
$$\delta_{a,i} \begin{matrix} i & j \\ j \end{matrix}$$
$$j \quad j$$
 j j j j j

$$r \leq \sigma xa$$

$$r \leq \sigma P_q a$$

$$q \leq \sigma x \leq r \leq \sigma xa$$

$$\delta$$

FINITE-

AUTOMATON-MATCHER

$$T$$

$$i$$

$$T\,i \qquad \qquad \qquad \sigma\,T_i$$

$$x \qquad \qquad \qquad a \qquad \qquad \qquad \sigma\,xa \leq \sigma\,x$$

$$\sigma\,xa \leq \sigma\,x \qquad \qquad \qquad xa \qquad \qquad \qquad P \qquad \qquad \qquad a$$

$$P \qquad \qquad \qquad x \qquad \qquad \qquad \sigma\,x$$

$$\begin{matrix} q & \sigma\,x & x \\ \sigma\,xa & \sigma\,P_q a \end{matrix} \qquad \qquad \qquad a$$

$$\begin{matrix} \sigma\,xa \leq q & \qquad \qquad \qquad \sigma\,xa \\ & xa & q \\ & P_q a & \\ & P_q & \sigma\,x \leq q \end{matrix}$$

$$\varphi \qquad P \dots m \qquad T \dots n$$

$$\varphi\,T_i \leq \sigma\,T_i$$

$$i \qquad \qquad \qquad , \dots , n$$

$$i$$

$$i$$

$$q$$

$$P_q \qquad \qquad \qquad T_i$$

P q m
 P

FINITE-AUTOMATON-MATCHER

34.3.3. Вычисление функции перехода

δ T $..m$

```

Compute Transition Function P Sigma
m gets length P
for q gets to m
  do for
    do k gets min m q
      repeat k gets k
        until P k sqsupset P qa
        delta q a gets k
  return delta

```

δ

q, a

k
 $P_k \sqsupset P_q a$

k

$\min m, q$

$O m^3 \Sigma$

$m \Sigma$

repea

m

$O m$

$O m \Sigma$

m

$O n m \Sigma$

Упражнения

$$P \rightarrow P'$$

$$P$$

$$\Sigma$$

$$P$$

$$T$$

$$O \rightarrow T$$

34.4.

$$\Theta(m, n)$$

$$\delta \dots m, \dots \Sigma \qquad \Sigma$$

$$\pi \dots m$$

$$O(m)$$

$$\pi$$

$$\delta(q,a)$$

$$q \in \{ , \dots, m$$

$$a$$

$$O$$

34.4.1. Префикс-функция, ассоциированная с образом

π P T s s P_5 P_5 π s q s' s $q - \pi \cdot q$ $\mathfrak{b}$ s $P \dots q$
 s' $T \cdot s \dots s \cdot q$ $P \dots k \quad T \cdot s' \dots s' \cdot k \text{ ,}$ $s' \cdot k \cdot s \cdot q$ s' $P \dots q$ $s', s \cdot q$
 $s, s', \dots, s \cdot q -$ k s' P q $T \cdot s' \dots s$ P_q k $k \cdot q$ P_k

πq P P_q

ababababca

KMP-MATCHER

KMP-MATCHER

FINITE

AUTOMATON-MATCHER

COMPUTE-PREFIX-FUNCTION

KMP-MATCHER

 π

KMP Matcher T P

n gets length T

m gets length P

pi gets Compute Prefix Function P

q gets

for i gets to n

do while q and P q ne T i

do q gets pi q

if P q T i

then q gets q

if q m

then print

i m

q gets pi q

Compute Prefix Function P

m gets length P

pi gets

k gets

for q gets to m

do while k and P k ne P q

do k gets pi k

if P k P q

then k gets k

pi q gets k

return pi

O

k

k

$\pi\ q$

$\pi\ j$

j

j

while

while

for

$O\ m$

q
KMP-MATCHER $O\ n$
KMP-MATCHER $O\ m\ n$

FINITE-AUTOMATON-MATCHER
 δ

$O\ m\ \Sigma\ n$

34.4.3. Префикс-функция вычисляется правильно

q

k

P_q

q

$\pi^* q\ q, \pi q, \pi^2 q, \pi^3 q, \dots, \pi^t q$

$\pi^0 q\ \pi^i q\ \pi^i q\ \pi^i q\ \pi^t q\ t$
 $\pi\ j\ j\ j$

m

π

$\pi^* q\ k\ P_k \sqsupset P_q$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
& & P & \text{ababababca} & q & & \pi \\
& P & & \pi & \pi & \pi & \pi \\
\pi^* & , & , & , & , & P & \\
& & & & & & P_k \\
& & P_8 & & & & \\
& & & & k & , & , & , & , \\
& & \pi^* & & & & & & \\
& & & & & & & & \\
& & & & k & P_k \sqsupset P_q \subseteq \pi^* q \\
& & & j & & & & & \\
& k & P_k \sqsupset P_q & \pi^* q & & j & q & j \\
& & \pi^* q & j & & & & \\
j & \pi j' & & j' \in \pi^* q & & & & \\
& P_j & P_{j'} & & P_q & & & \\
j & & & & & P_j \sqsupset P_{j'} & & \\
& P_j & & & P & & & \\
& & P_{j'} & & \pi & & & \pi j'
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccccccc}
P & & m & & \pi & & \pi q - \\
\in \pi^* q - & q & , & , \dots, m & \pi q & & \\
\\
k & \pi q & P_k \sqsupset P_q & & & & \\
& & P_{k-1} \sqsupset P_{q-1} & & & & \\
\pi q - & \in \pi^* q - & & & & & \\
q & , & , \dots, m & & E_{q-1} & & \\
\\
E_{q-1} & k & k \in \pi^* q - & P k & P q & & \\
\\
E_{q-1} & k & P_k & & P_{q-1} & & \\
& P k & P q & & P_{k+1} & & \\
\\
P & & m & & \pi & & \\
q & , & , \dots, m & & & & \\
\\
\pi q & \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. , & \max k \in E_{q-1} , & & E_{q-1} \setminus \emptyset & & \\
& & & & E_{q-1} / \emptyset & & \\
\\
r & \pi q & P r & P q & & & r - \in \\
^* q - & r - & \in E_{q-1} & & E_{q-1} & &
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \pi q \quad E_{q-1} \quad \pi q \leq \max_{k \in E_{q-1}} k \\
& \quad \quad \quad k \in E_{q-1} \quad \pi q \quad P_q \\
& \quad \quad \quad P_{k+1} \\
& E_{q-1} \\
& \text{COMPUTE-PREFIX-FUNCTION} \quad q \\
& q \\
& \quad \quad \quad k \quad \pi q - \quad q \\
& k \quad \pi q - \\
& \quad \quad \quad k \quad \pi q \\
& \quad \quad \quad E_{q-1} \\
& \quad \quad \quad P k \quad P q \\
& \quad \quad \quad \pi q \\
& P k \quad / \quad P q \quad \pi q \quad k
\end{aligned}$$

34.4.4. Алгоритм КМР правилен

$$\begin{aligned}
& \text{KMP-MATCHER} \\
& \text{COMPUTE-PRE} \\
& \text{FUNCTION} \quad i \\
& \bullet \\
& \quad \sigma T_i \\
& \bullet \\
& q \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma T_{i-1}, & \sigma T_{i-1} = m \\ \pi m, & \sigma T_{i-1} \neq m \end{array} \right. \\
& \sigma T_j \quad P \\
& T_j \\
& i \\
& i \\
& i \\
& S \quad k \quad m \quad P_k \sqsupset P_q \quad k \in S \\
& P k \quad T i \quad k \quad P \quad / \quad T i \\
& q \\
& k \quad P_i \sqsupset T_{i-1} \quad P_{i+1} \sqsupset T_i \quad k \quad \sigma T_i
\end{aligned}$$

$$\sigma(T_i) = q$$

$$i \rightarrow n \rightarrow i$$

Упражнения

ababbabbababbababbabb

$$q \quad \pi^* q$$

$$PT \quad \begin{matrix} P \\ P \end{matrix} T \quad T$$

$$\text{KMP-MATCHER} \quad \pi \quad \pi' \quad \pi'$$

$$\begin{aligned} \pi' q & \left(\begin{array}{l} \pi q \\ \pi' \pi q \end{array} \right), \quad \pi q / P \pi q \quad P q \\ & \left(\pi q, \quad \pi q / P \pi q \quad / P q \right) \end{aligned}$$

KMP.

MATCHER

$$T' \quad \text{arc} \quad \text{car} \quad T$$

$$\delta \quad P \dots m$$

$$\Sigma \quad \delta(q, a) \quad \delta(\pi q, a)$$

$$q \rightarrow m \rightarrow P q \rightarrow a$$

```

Boyer Moore Matcher T P Si
  n gets length T
  m gets length P
  lambda gets Compute La
  gamma gets Compute Goo
  s gets
  while s leqslant n m
    do j gets m
      while j and P
        do j gets
      if j
        then print
          s gets
        else s gets

          s gets
        else s gets

```

$$T s \quad ..s \quad m$$

$$\gamma j$$

bad character

good suffix

reminiscence

s

ce

i

$$P\ m \ / \ T\ s \ \ m$$

$$\mathbf{a}^m$$

$$s$$

$$m$$

$$m$$

$$!$$

-

tic

$$\leq j \leq m \qquad k \qquad P$$

$$s \qquad j-k \qquad k \qquad P$$

$$T\ s$$

$$j-k$$

$$k$$

$$a \in \Sigma$$

COMPUTE-LAS

$$\lambda\ a$$

$$a \ P$$

$$j-$$

BOYER-MOORE-M

Compute Last Occurrence Function P m

for a in S

do lambda a gets

for j gets to m

do lambda P j gets j

return lambda

COM

FUNCTION $O \ \Sigma \ m$ **34.5.2. Эвристика безопасного суффикса**

bad character

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & j \\
 & & & & & k & j \\
 & & j - k & & & & j \\
 k & & i & & k & j & - \\
 e & j & & k & & &
 \end{array}$$

$$\sim \qquad Q \sim R \qquad R \sim Q$$

$$Q \sqsupset R \quad S \sqsupset R \quad Q \sim S \qquad .$$

$$P \, j \, / \, T \, s \, \, j \qquad \text{good suffix heuristic} \qquad j \, \, m \qquad j$$

$$\gamma \, j \, \, m - \max \, k \, \, \leqslant k \, \, m \, \, P \, j \, \, ..m \sim P_k \, \, .$$

$$\gamma \, j$$

$$T \, s \, \, j \, \, ..s \, \, m$$

$$P \, j \, \, ..m \qquad j \qquad P_0 \qquad \gamma \, j \qquad \gamma \, j$$

$$\text{tion} \qquad \gamma \qquad P \qquad \text{good suffix func}$$

$$\gamma \qquad P_{\pi \, m} \sqsupset P$$

$$P \, j \, \, ..m \sim P_{\pi \, m} \qquad j \qquad \gamma \, j \qquad \pi \, m$$

$$\gamma \, j \leqslant m - \pi \, m \qquad j$$

$$\gamma$$

$$\gamma \, j \, \, m - \max \, k \, \, \pi \, m \leqslant k \, \, m \, \, P \, j \, \, ..m \sim P_k \, \, .$$

$$P \, j \, \, ..m \sim P_k$$

$$P \, j \, \, ..m \sqsupset P_k \qquad P_k \sqsupset P \, j \, \, ..m \qquad k \leqslant \pi \, m \qquad k \, \, \pi \, m$$

$$P_k \sqsupset P_m \qquad \gamma$$

$$\gamma \, j \, \, m - \max \, \pi \, m \qquad k \, \, \pi \, m \qquad k \, \, m \, \, P \, j \, \, ..m \sqsupset P_k$$

$$P_k \qquad P \qquad P \, j \, \, ..m$$

$$P \, j \, \, ..m \qquad k \, \, m$$

$$P'$$

$$\begin{array}{rcl}
& P' i & P m - i \quad \pi' t \quad u \quad t \\
P'_u \sqsupset P'_t & & \\
X & P & k \\
& P_k & P j \quad ..m \\
& m - j & \\
l & m - k & m - j \quad m - k \\
X & & m - j \\
l & m - j & \\
& \pi' l & m - j. \\
& & X' \\
X & & \\
& P j \quad ..m & X \\
P & & P j \quad ..m \\
& & j \quad m - \pi' l \\
k & m - l \quad \pi' l & \\
& \gamma j & \\
\gamma j & m - \max \pi m & m - l \quad \pi' l \leq l \leq m \quad j \quad m - \pi' l
\end{array}$$

34.5.3. Упражнения

$$\lambda \quad \gamma \quad P$$

$$\gamma' \quad \gamma$$

$$\gamma' j \quad m - \max k \quad \leq k \quad m \quad P j \quad ..m \sim P_k \\ k - m \quad j \quad \Rightarrow P j \quad / \quad P k - m \quad j$$

$$\gamma'$$

$$\begin{array}{l} y^i \\ y \\ x \in \Sigma^* \\ x \quad y^r \quad r \end{array} \quad \begin{array}{l} ab^3 \quad ababab \\ i \\ y \in \Sigma^* \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho \quad x \\ x \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{has repetition factor } r \\ \rho \quad P_i \end{array}$$

$$P \quad i \quad , \quad , \dots, m \quad \rho \quad P_i$$

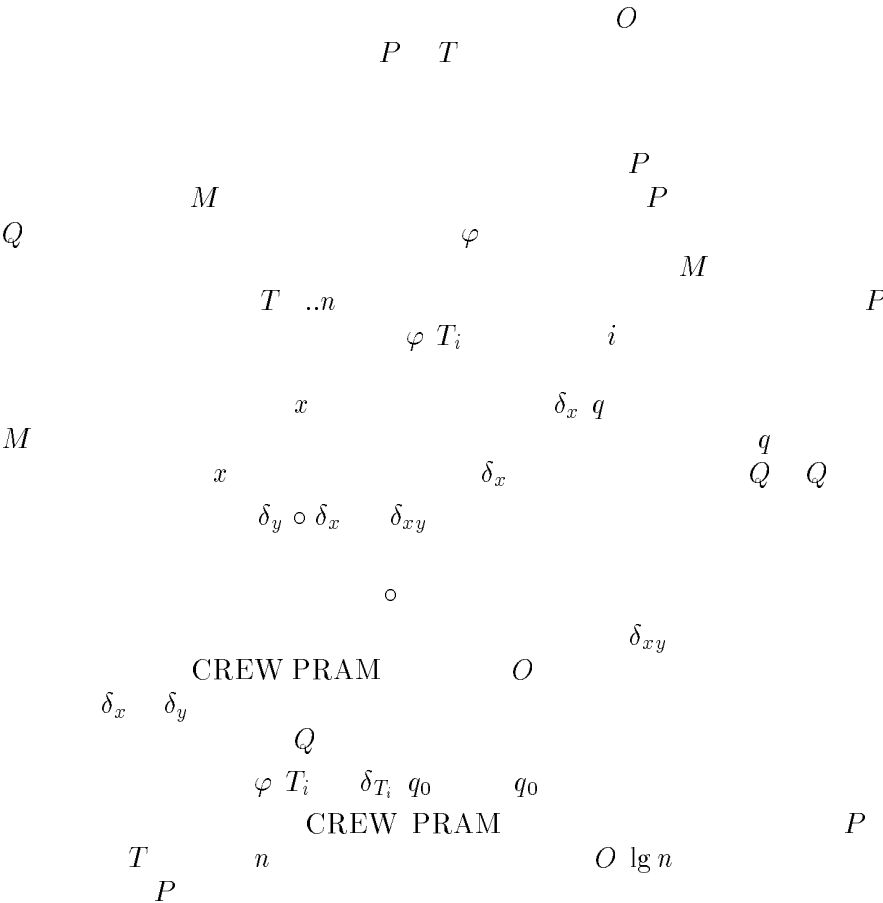
$$\Sigma \quad P \quad ..m \quad P \quad \rho^* \quad P \quad \max_{1 \leq i \leq m} \rho \quad P_i$$

$$\rho^* \quad P$$

$$m$$

```
while s leqslant n m
do if T s q      P q
    then q gets q
        if q m
            then print

    if q m      T s q      ne P q
        then s gets s max      lceil q k rceil
            q gets
```





$$p_i \quad x_i, y_i \quad x_i, y_i \in \mathbb{R} \quad p_i \quad n \quad F$$

35.1.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{convex combination} & & & & \\
 p_1 & x_1, y_1 & p_2 & x_2, y_2 & & p_3 & \\
 x_3, y_3 & & x_3 & \alpha x_1 & - \alpha x_2 & y_3 & \alpha y_1 & - \alpha y_2 \\
 & & \leq \alpha \leq & & & & & \\
 p_3 & \alpha p_1 & - \alpha p_2 & & & p_3 & & \\
 & & p_1 & p_2 & & & & \\
 & & \text{line segment} & \overline{p_1 p_2} & & & & \\
 p_1 & p_2 & p_1 & p_2 & & \text{endpoints} & & \\
 & & \text{directed segment} & \overrightarrow{p_1 p_2} & p_1 & & & \\
 & & & & \text{origin} & & & \overrightarrow{p_1 p_2} \\
 & & \text{vector} & p_2 & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & \overrightarrow{p_0 p_1} & \overrightarrow{p_0 p_2} & \\
 p_0 & & & & & & & \\
 & & \overrightarrow{p_0 p_1} & p_0 & & & & \\
 \overrightarrow{p_0 p_2} & & & & & & & \\
 & & p_1 p_2 p_3 & & & \overline{p_1 p_2} & & \\
 \overline{p_2 p_3} & & p_1 & p_3 & & & & p_2
 \end{array}$$

$$p_1 \quad p_2$$

$$, \quad p_1$$

$$x_2y_1 \quad -p_2 \times p_1$$

$$p_1$$

$$\frac{x_1y_2-x_2y_1}{p_2}$$

$$\mathbf{b}$$

$$p$$

$$p$$

$$\overrightarrow{p_0p_2}$$

$$p_0$$

$$x_0, y_1 - y_0 \quad p_2 - p_0$$

$$= x_2 - x_0 \quad y_1 - y_0 \quad .$$

$$\frac{\overrightarrow{p_0 p_1}}{b} \quad \begin{matrix} \text{a} \\ \text{b} \end{matrix}$$

bou

!!!

e

f

$$\overline{p_3p_4}$$

$$\overline{p_1p_2} \quad \text{a} \\ p_4 - p_1 \times p_2 - p_1$$

$$p_3 - p_1 \times p_2 - p_1$$

b

c d

e

$$\overline{p_1p_2}$$

$$p_3p_4 \quad \text{f}$$

e

f

$$p_1p_2$$

$$\overline{p_3p_4}$$

$$p_1p_2$$

$$p_3 - p_1 \times p_2 - p_1$$

$$p_4 - p_1 \times p_2 - p_1$$

$$p_1 \times p_2 \qquad p_2$$

$$p_1,p_2,\ldots,p_n$$

$$p_0$$

$$O~n\lg n$$

$$O~n^2\ln n$$

$$n$$

$$p_0,p_1,\ldots,p_{n-1}$$

$$p_i p_{i+1} p_{i+2} \dots p_{n-i-1}, \dots, p_{n-i-1} p_{n-i} p_{n-i+1}$$

$$x_0,y_0$$

$$y_0$$

$$\text{right horizontal ray}$$

$$p_i \quad x_i, y_i \quad x_i$$

$$p_0$$

$$O$$

a
 b ${}_u c$ d
 b
 e f
 f

z

a ${}_r c, a$ ${}_t b, b$ ${}_t c, a$ ${}_t c$
 e ${}_v f$ f ${}_w e$
 e





`emph return false`

T

for

s

TRUE

s

T

FALSE

ANY-SEGMENT-INTERSECT *S*

TRUE
S

TRUE

S

TRUE

FALSE

a

T

b

T

T

T

T
 T

a b

S n
ANY-SEGMENT-INTERSECT $O \ n \lg n$

$O \lg n$ n

O
 n
 $\Theta \ n^2$
 $a \quad b$
 $O \quad x$
 $a \quad x \quad b$

INTERSECT

ANY-SEGMENT-

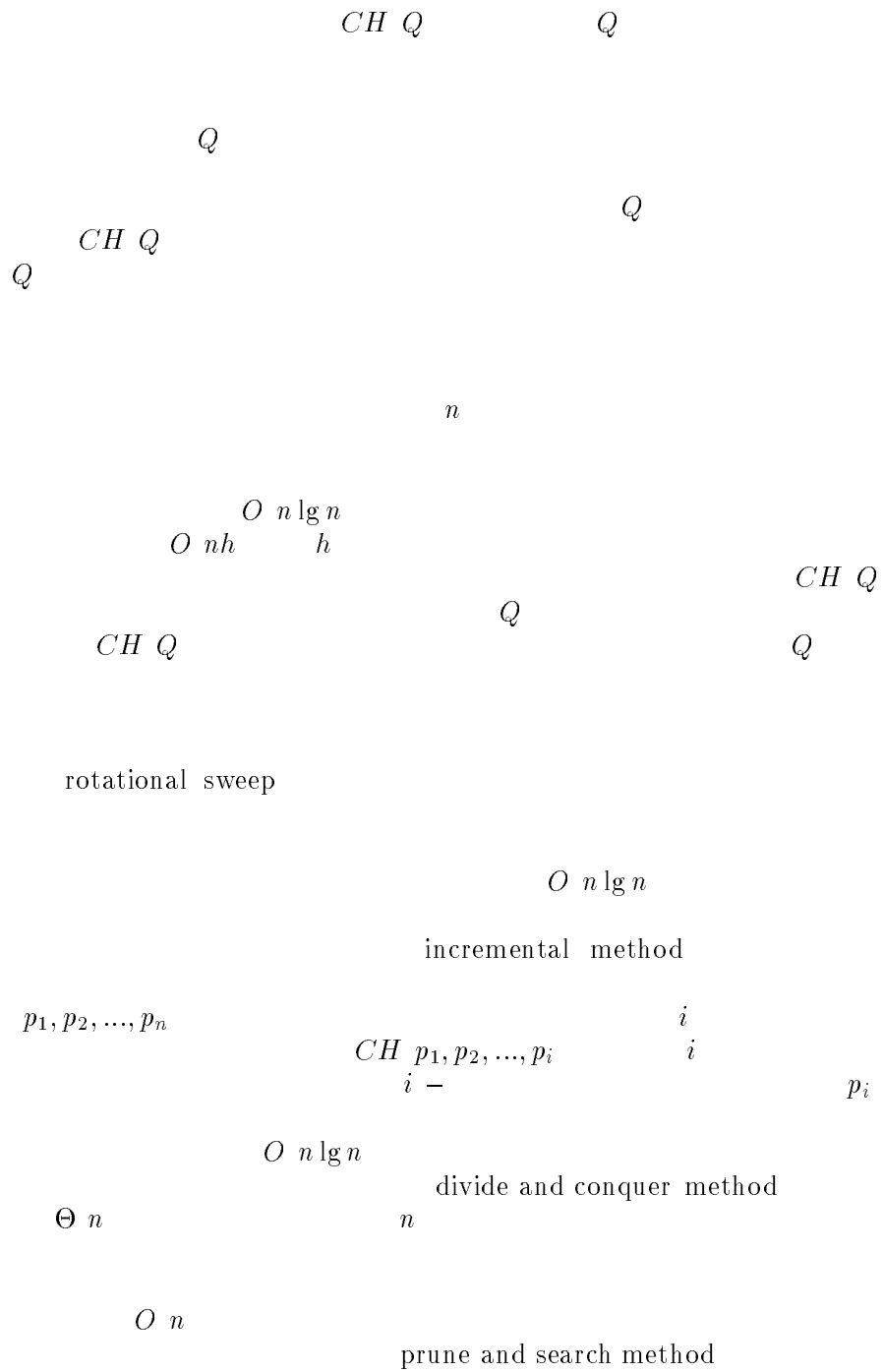
for

PRINT-INTERSECTING-SEGMENTS

 $O \ n \lg n$
 n
 n
 $O \ n \lg n$
 n
 $O \ n \lg n$
 $O \ n \quad k \lg n$
 n
 k

INTERSECT

ANY-SEGMENT-





Graham Scan Q

\$p\$

\$Q\$

\$\angle p \quad p \quad p \quad m \quad \angle\$
\$Q\$

\$p\$

" a

\$p\$

\$S\$

\$Push S p\$

\$Push S p\$

\$Push S p\$

emph for \$i \leftarrow\$ emph to \$m\$

emph do while

\$Next To Top S \rightarrow Top S \rightarrow p \ i\$

emph do \$Pop S\$

\$Push S p \ i\$

emph return \$S\$

GRAHAM-

SCAN

p_0

Q

$CH \ Q$

Q

p_0

O

Q

$p_1 \quad p_m$

$, \pi$

$CH \ Q$

p_0, p_1, p_2

$p_0, p_1, \dots, p_k \quad k$
 k

m

GRAHAM-SCAN

Q

S

Q

$$\begin{array}{c}
\text{b} \\
p_0 p_i p_j \\
p_1, \dots, p_k, p_j \\
p_0 \\
, \pi \qquad p_0 p_1 \dots p_k p_j
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
p_0 p_1 \dots p_k p_j p_0 \\
\text{a} \\
p_0 \\
p_1, \dots, p_k, p_j, p_i \\
p_0 \\
, \pi \\
p_0 p_1 \dots p_k p_j p_i
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
p_1, \dots, p_k, p_j, p_i \\
p_j
\end{array}$$

!!!

$$O \ n \lg n \qquad n \qquad Q$$

 $O \ n$
fo



a

 p

b

 q q'

shadow

 P q r $\overline{qr}$ P P

star shaped

 p P kernel
 n p P P $CH\ P$ $O\ n$ *on-line* on line convex hull problem
 n Q $O\ n^2$ $O\ n^2 \lg n$ n $O\ n \lg n$ **35.4.** $n \leq$ Q p_1 x_1, y_1 p_2 x_2, y_2

$$T_n \qquad T_n \qquad O_n$$

$$X \rightarrow Y$$

$$p$$

$$n \qquad O(n \ln^2 n)$$

$$Y \qquad P \leq$$

$$P_L \quad P_R \qquad l$$

$$X \qquad X_L$$

$$P_L \quad P_R$$

$$Y_R$$

$$P \qquad P_L \quad P_R$$

$$P_L$$

$$Y_R$$

$$P_L \quad P_R \qquad \delta_L \quad \delta_R$$

$$P$$

$$\delta$$

$$\delta \qquad P_R$$

$$l$$

$$\delta$$

$$l$$

$$\mathbf{a}$$

$$Y$$

$$Y'$$

$$Y'$$

$$Y'$$

$$\delta$$

$$\delta t \qquad \qquad \qquad Y t \qquad \qquad p \qquad Y'$$

$$\delta' \quad \delta$$

$$\delta'$$

$$\delta$$

$$O~n\lg n$$

$$p_L \in P_L \quad p_R \in P_R \qquad \qquad \qquad \text{a} \qquad \qquad \delta$$

$$l$$

$$\delta$$

$$p_L$$

$$p_R$$

$$\delta$$

$$\delta$$

$$p_L$$

$$p_R$$

$$\delta$$

$$p_L$$

$$p_R$$

$$\text{a}$$

$$\delta \times \delta$$

$$l$$

$$P$$

$$\delta \times \delta$$

$$P_L$$

$$\delta$$

$$\text{b}$$

$$P_L$$

$$P_L$$

$$P_R$$

$$P_L$$

$$P_R$$

$$P_L$$

$$P_R$$

$$P_L \quad P_R$$

$$\text{MERGE}$$

$$\text{presorting}$$

$$O \; n \lg n$$

$$O \; n \lg n$$

$$O \; n \lg n$$

$$Y'$$

$$l$$

$$P_R$$

$$l$$

$$P_L \quad P_R$$

$$\delta \times \delta$$

$$Y'$$

$$L_m-$$

$$L_m \text{ distance}$$

$$p_1 \quad p_2$$

$$x_1-x_2 \stackrel{m}{\sim} y_1-y_2 \stackrel{m-1}{\sim} m$$

$$p$$

$$L_1$$

$$L_\infty$$

$$p_1 \quad p_2 \quad \max \; x_1 -$$

$$x_2 \; , \; y_1-y_2$$

$$L_\infty$$

$$Q \qquad \qquad \qquad CH \; Q$$

$$\begin{array}{ccc} \text{a} & & O \; n_2 \\ & n & \\ \text{b} & & n \end{array}$$

$$Omega \; n \lg n$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{nates} & x',y' & x & x' & y & y' & \begin{matrix} x,y \\ Q \end{matrix} \\ & & & & & & Q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Q & \text{maximal} & Q \\ & & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & Q & k \\ L_1, L_2, \dots, L_k & y_i & \\ i & , \dots k & Q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{a} & & y_1 & y_2 & \dots & y_k & \\ & & x,y & & & & Q \\ & & & & & & Q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & y & & & & & \\ Q' & Q & x,y & & & & \\ \text{b} & & & j & & & \\ y & & & & y & y_k & j \; k \\ & & & & & Q' & \\ & j \leq k & & & & Q' & \\ & Q & & & L_j & & \\ x,y & & & & & & L_j \end{array}$$

$$O\left(n^2\lg n\right) \qquad O\left(n\lg n\right)$$

 $-\varepsilon$
 ε
 n

sparse hulled distributions

$$\Theta\left(n^{1/3}\right)$$



NP

P

NP

NP

NP

NP

NP



I

S e S

$, , , , , \dots$ e

ASCII EBCDIC e A ASCII

i n $O\ T\ n$ solves
 k $O\ T\ n$
polynomial time solvable $O\ n^k$
P

Q e I
 $e\ Q$

$e\ Q$

$\Theta\ k$ k k
unary representation n k $O\ n$
 k n

$$\Theta \quad n$$

f , $\ast \rightarrow$, $\ast$
 is polynomial time computable
 A

Σ , G, u, v, k G V, E PATH G k .

PATH

A

accepts

$x \in$

$$O_{n^k} \text{EXP}$$

$$P \quad L \subset \quad , \quad * \quad A \quad P \quad L$$

$$P \quad L \quad L$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & L \\ & & & & & & A' \\ & & A & & L & & O \, n^k \\ & n & L & c & T & cn^k & A \\ & & & & & & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & A' & & A & & \\ T & & T & & A & & x \\ & & & & & & A \\ x & & & & A' & & \end{array}$$

$$L \quad A$$

a

b

PATH

G

u

v

k

NP

W R Hamilton

hamiltonian cycle

$G = (V, E)$

hamiltonian graph

a

b

hamiltonian path problem

G

HAM CYCLE

G

G

n

G

m

G

Ω

$m!$

$\overline{n}$

verification algorithm

x A verifies an input string x
 $A(x, y)$,
 language verified by A

$y \in \Sigma^*$ $A(x, y)$

A L
 x y L $x \notin L$ A

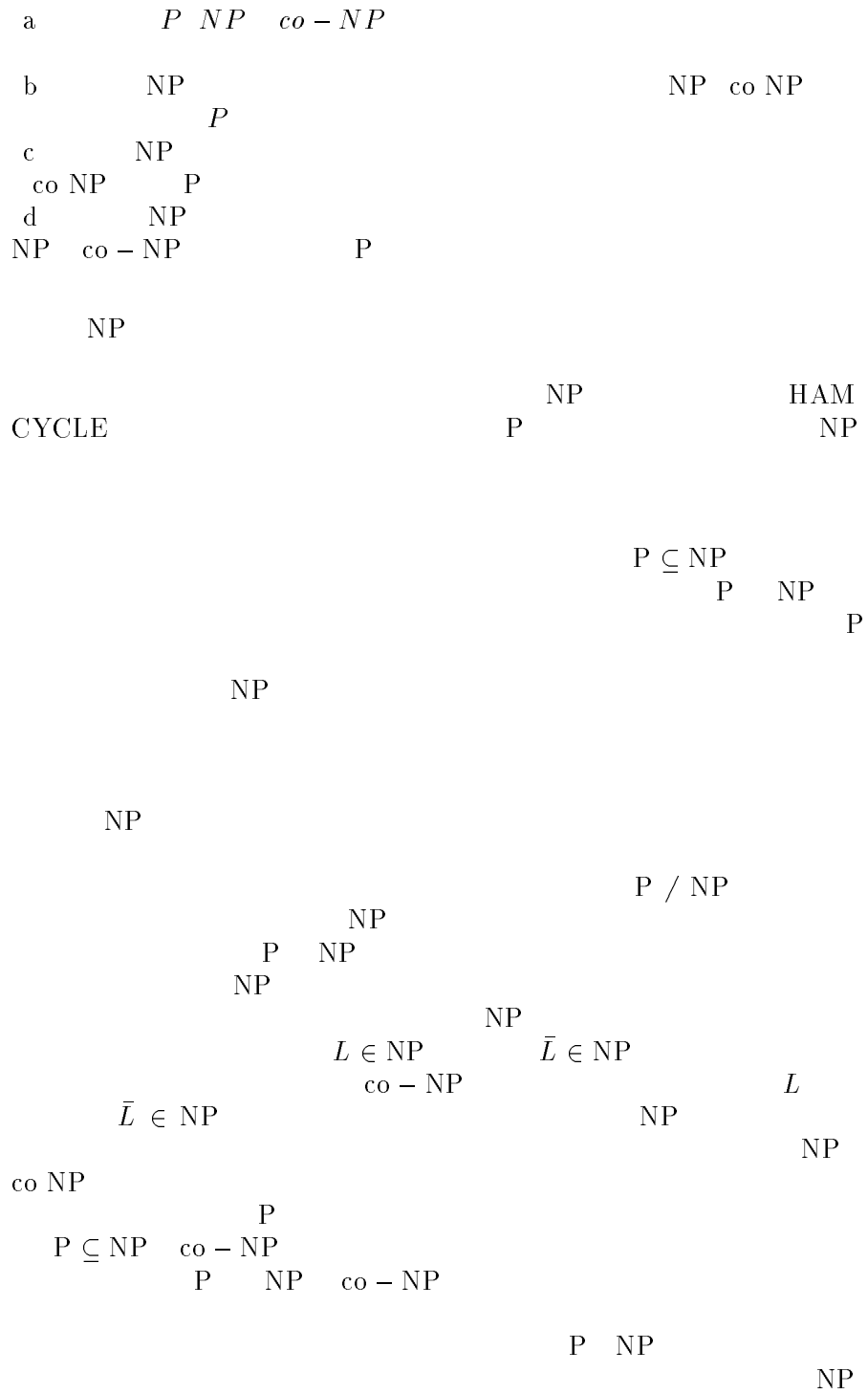
HAM CYCLE

NP

NP complexity class NP

L

$p(x)$



P NP

GRAPH ISOMORPHISM G_1, G_2

HAM CYCLE P

NP

NP

G

G

G^3
 G

6.3. NP-

NP P NP

NP

NP

P NP
NP

HAM PATH

NP

NP

NP P

HAM PATH $\in$ NP P
NP NP

NP

CIRCUIT SAT

NP

Q

Q'

Q

Q'

Q'

Q

Q

Q'

Q

Q'

L_1

is polynomial time reducible

$L_1 \leq_P L_2$

f

L_2
 $\ast \rightarrow$
 $x \in$

reduction algorithm			
			L_1
L_2			
$x \in L_1$	$f(x) \in L_2$	$x \notin L_1$	$f(x) \notin L_2$
			L_2
L_1			
$L_1 \subseteq L_2$	$L_1 \in P$	$L_2 \in P$	
	A_2		
L_2	F		
L_1	L_2	A_1	
		L_1	
	A_1	F	$x \in L_1$
	A_2		$f(x) \notin L_2$
L_2		A_2	$f(x) \in L_2$
	A_1		
		A_1	
$x \in L_1$			
	$L_1 \leq_P L_2$		
	L_1		
L_2			NP
$L \subseteq L'$	NP -	NP complete	
$L' \leq_P L$	$L' \in NP$		
NP		NPC	
NP -	NP hard		
	NP		
P	NP		
	NP		
	NP		
$L \in P$	$L \in NPC$		

P NPC

NP

x_1, x_2, x_3



out bits

aux machine state

working storage

output

A

x

y

$A \ x \ y$

C

M

$c_{T(n)}$

$c_1, c_2, \dots, c_{T(N)}$

$T \ n$

M

i

M

c_i

$c_{T(n)}$

C'

F

x

C

$f \ x$

y

x, y

n

x

C'

$A \ x, y$

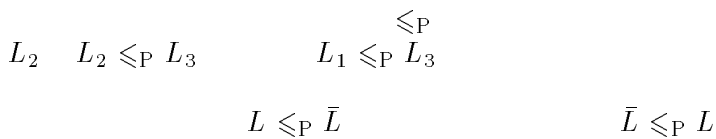
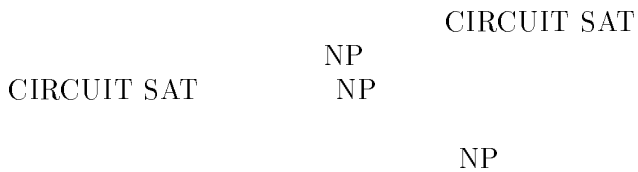
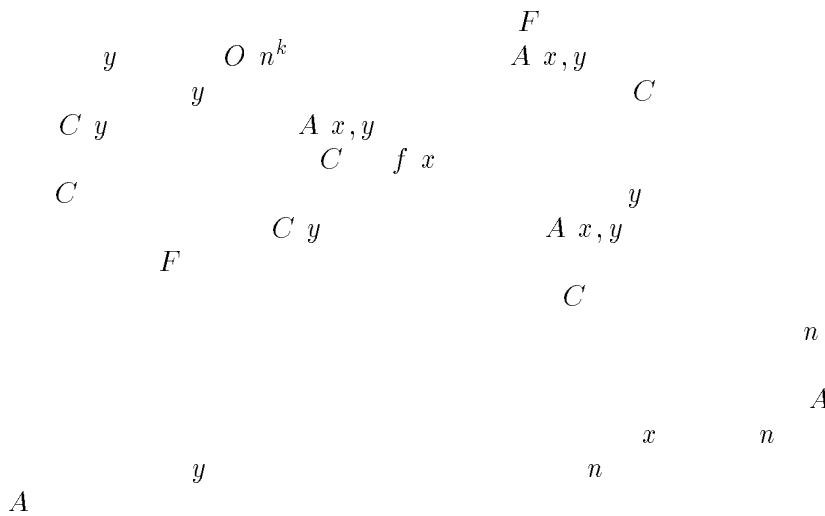
C'

$c_{T(n)}$

A

x

y



$$P \qquad \qquad \qquad \emptyset \qquad , \qquad *$$

$$\bar{L} \qquad \qquad \qquad L \qquad \qquad \qquad \text{NP}$$

$$\text{co} - \text{NP}$$

$$F \qquad \qquad \qquad C \quad f \quad x$$

$$x \quad A \quad k$$

$$x \qquad \qquad \qquad A \quad k$$

$$L \qquad \qquad \qquad \text{NP}$$

$$A \quad k$$

$$\qquad \qquad \qquad F \qquad \qquad \qquad \text{NP}$$

$$\text{CIRCUIT SAT}$$

$$\text{NP} \qquad \text{NP} \qquad \text{CIRCUIT SAT}$$

$$\text{NP} \qquad \qquad \qquad \text{CIRCUIT SAT}$$

$$\text{NP} \qquad \qquad \qquad \text{NP}$$

$$\qquad \qquad \qquad \text{NP}$$

$$\qquad \qquad \qquad \text{NP}$$

$$\text{NP}$$

$$L \text{ NP} \qquad L \qquad L' \in \text{CNP} \qquad L' \leqslant_P L$$

$$\qquad \qquad \qquad L \in \text{NP} \qquad L \in \text{CNP}$$

$$L' \in \text{CNP} \qquad L'' \qquad \text{NP}$$

$$L' \leqslant_P L$$

$$L'' \leqslant_p L \qquad L \qquad \text{NP}$$

$$L \in \text{NP} \qquad L \in \text{CNP}$$

$$\qquad \qquad \qquad \text{NP}$$

$$\text{NP}$$

$$L \qquad \qquad \qquad \text{NP} \qquad \qquad \qquad L'$$

$$L \in \text{NP}$$

$$\qquad \qquad \qquad f$$

$$L' \qquad \qquad \qquad L$$







$$\rightarrow x_2 \quad \neg \quad \neg x_1 \leftrightarrow x_3 \quad x_4 \quad \neg x_2. \quad .$$

$$y_i$$

$$\begin{array}{l} y_1 \quad y_1 \Leftrightarrow y_2 \quad \neg y_2 \\ y_2 \Leftrightarrow y_3 \quad y_4 \\ y_3 \Leftrightarrow x_1 \rightarrow x_2 \\ y_4 \Leftrightarrow \neg y_5 \\ y_5 \Leftrightarrow y_6 \quad x_4 \\ y_6 \Leftrightarrow \neg x_1 \leftrightarrow x_3 \quad . \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} p & q & r & p & q & \neg r & p \\ & & & & & & p & q \\ p & q & r & p & q & \neg r & p & \neg q & r & p & \neg q & \neg r \end{array}$$

n

on n

CNF

CNF

NP

co - NP

CNF SAT

CNF SAT $\in$ P

$$\neg x \rightarrow y \qquad \text{CNF SAT}^{x,y}$$

36.4. NP-

NP

NP

CIRCUIT SAT

NP

SAT

SAT

36.4.1. Задача о клике

clique

 $G = (V, E)$



G

V'

k

V'

6.4.2. Задача о вершинном покрытии

$V' \subseteq V$ V V, E
 vertex cover

, ,

NP

$$t = k + |E| \sum_{j=0}^{|E|-1} \cdot j.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & G & & S & \\ & k & & & & & \\ S' & & t & & & & V' \subseteq V \\ & & & & i_1, i_2, \dots, i_k & & \\ S' & & & & & & \\ & S' & & & & & \\ & & & k & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & S' & & \\ & & & & & t & \\ c & & & & & & y_0, y_2, y_3, y_4 \\ & & & & & & \\ & & & & & & S' \\ & & & t & & & \end{array}$$

$$S'$$

$$k$$

36.4.3. Задача о гамильтоновом цикле

SAT

 G G A

CNF SAT

 $b_1 \quad b_4$ $b_3 \quad b_4$

a

f

 A A G $, b, b'$ G $z_1 \quad \cdots \quad z_4$

b

 A

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ \neg x_2 & x_3 & x_1 & x_2 & \neg x_3 \\ & x_1 & & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$e_m\qquad\qquad x_m\qquad\qquad \bar{e}_m$$

$$\begin{array}{c} \varphi \\ C_1, C_2, \ldots, C_k \\ C_i \end{array}$$

$$\begin{array}{c} b_{i,j} \\ b_{i+1,1} \end{array} \qquad i \qquad , \quad , \ldots , k - \qquad b_j$$

$$\begin{array}{c} x_m \\ x'_m \quad x''_m \\ e'_m \end{array}$$

$$e'_m\qquad\qquad\qquad x_m$$

$$e'_m\qquad\qquad\qquad x''_m, x'_{m+1}$$

$$e_m$$

$$\bar{e}_m$$

$$A$$

$$\varphi$$

$$b_{1,1},x'_1$$

$$m$$

$$n$$

G φ CNF SAT
HAM CYCLE

36.4.4. Задача коммивояжёра

traveling salesman problem TSP

n

i j

TSP G, c, k G V, E $c: V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$
 $k \in \mathbb{Z}$ G k

NP

TSP

NP

HAM CYCLE

G

G'

G

AT

 t t

set partition problem

 S

$$\sum_{x\in A}x\qquad\sum_{x\in S\setminus A}x$$

NP

,

 A $z_3\quad z_4$

$$G \quad V, E \quad k- \quad k \text{ coloring} \quad c \quad V \rightarrow \quad , \quad , \dots , k \quad c \quad u \quad / \quad c \quad v \quad , \quad , \dots , k \quad u, v \in E \quad c \quad v \quad v$$

graph coloring problem

G

a

b

c

COLOR

NP
CNF SAT
 m

NP
 $G \quad V, E$

b
COLOR
 φ

COLOR
NP
CNF
 $x_1, x_2, \dots, x_n$

$x_i \quad \varphi$
 x_i

φ
 $\neg x_i$

TRUE FALSE RED

G

TRUE FALSE RED

x_i

$x_i \quad \neg x_i \quad \text{RED}$
d

G

x_i

$\neg x_i$
TRUE
 $c \text{ TRUE}$
 $c \text{ FALSE}$

$$x \quad y \quad z$$
$$\begin{array}{ccc} \varphi & & \\ x & y & z \end{array}$$

TRUE

e

$$x \quad y \quad z$$

c TRUE

c FALSE

c TRUE

f

NP

COLOR

NP

NP

NP

NP

P

NP

P / NP

NP

CNF SAT

NP

NP

NP

NP

NP

NP

NP

NP

approximation algorithms

NP

ratio bound $\rho \cdot n$ has a ratio bound $\rho \cdot n$

C C^*

$$\max_{C \in \mathcal{C}} \frac{C}{C^*} \leq \rho \cdot n .$$

$$\frac{C}{C^*} \leq \rho \cdot n$$

$$C^* \leq C \leq \rho \cdot n$$

tive error

$$\frac{C - C^*}{C^*},$$

ε/n

and ε/n

$$\frac{C - C^*}{C^*} \leq \varepsilon/n.$$

ε

fully polynomial time approximation

scheme

n

ε

n

ε

$\varepsilon^{-2}n^3$

ε

NP

P

NP

37.1.

NP

vertex cover

$V' \subseteq V$ $G = (V, E)$

u, v

37.1 APPROX-VERTEX-COVER (a) C
 7 8 (b) (b, c) (c, d) C
 $(a, b), (c, e)$ (c, d) (e, f) C
 d) (d, g) C (e) (b, d, e)
 C , 6 b, c, d, e, f, g . (f)

APPROX-VERTEX-COVER

E' u, v E' u v APPROX-
 C E' C

E' u v C E'
 u v E'
 O E E'
 APPROX-VERTEX-COVER

C
 E' C A

C A

γ^*

$A \leq C^*$

37.2.

V, E u, v $c(u, v)$ G

$$A \subseteq E$$

$$c(A) = \sum_{(u,v) \in A} c(u, v).$$

$$w \quad u \quad v$$

$$c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$$

$$u, v, w$$

NP

C
P

NP

C

37.2.1. Задача коммивояжёра (с неравенством треугольника)

ис. 37.2 APPROX-MST-TOUR. (a) f 1
 2 $h.)$ (T
 $)$ (b)
MST-PRIM. a (T
MST-PRIM.) (c) T
 $a.$,
 $a, b, c, b, h, b, a, d, e, f, e, g, e, d, a.$
 $, b, c, h, d, e, f, g.$ (d) H
APPROX-MST-TOUR. 19,074. (e)
 $\approx 14,715.$

APPROX-TSP-TOUR
 $r \in V\ G$
 T G
MST-PRIM G, c, r
 r
 L
return L
 v v
 v
a
 a b
c d
APPROX-MST-TOUR
e
APPROX-MST-TOUR $\Theta\ E$
MST-PRIM
 $\Theta\ V^2$

APPROX-MST-TOUR
 H^*
 $c\ H \leq c\ H^*$ H
 H^*
 $c\ H^*$
 T

W
 $a, b, c, b, h, b, a, d, e, f,$
 $c\ W$
 $c\ W \qquad c\ T$
 $c\ W \qquad c\ H$
 W
 $\dots \rightarrow u \rightarrow w$
 v
 u, w
 W
 a, b, c, h, d, e, f
 H
 APPROX-TSP-TOUR
 $c\ H \leqslant c\ W$
 H
 W
 APPROX-TSP-TOUR

$$\begin{array}{ccc} & v & \\ v & & u \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{NP} \\ \text{NP} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{covering problem} \\ \mathcal{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} X \\ S \in \mathcal{S} \end{array}$$

$$X$$

$$\begin{array}{c} X \\ S \in \mathcal{S} \end{array}$$

Ис. 37.3 37.3.

У

12

Е

6

80.

$$S_i$$

$$H(d) = \sum_{i=1}^d i$$

$$\mathsf{GREEDY}$$

$$H(\max_{S\in\mathcal{F}}|S|)$$

$$x \in S_k \cup S_i \cup \{k,i\}$$

$$c_x = \frac{1}{|S_i - S_1 - S_2 - \ldots S_{i-1}|}$$

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$$

$$x \in \mathcal{C}_x$$

$$\mathcal{C}(\max_{S\in\mathcal{F}}|S|)$$

$$\mathcal{C}^*$$

$$\mathcal{C}=\sum_{x\in X}c_x\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{S\in \mathcal{C}^*}\sum_{x\in S}c_x$$

$$S \qquad \qquad \qquad \mathcal{F}$$

$$\sum_{x\in S}c_x\leqslant H(S)\;.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\leqslant \sum_{S\in\mathcal{C}^*} H(S) \leqslant \\ &\leqslant \mathcal{C}^*\cdot H\max\{S\mid S\in\mathcal{F}\}\;, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F} \qquad \qquad \qquad u \qquad \qquad \qquad S$$

$$S$$

$$\dots \qquad \qquad \qquad u$$

$$u$$

$$S \qquad \qquad \qquad S$$

$$u$$

$$X$$

$$u$$

$$S$$

$$u$$

$$u_1$$

$$\dots \qquad \qquad \qquad u_1$$

$$u_1$$

$$k$$

$$u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{k-1} \quad u_k$$

$$S$$

$$, \dots, k$$

$$S$$

$$\overline{u_1-1} \quad \dots \quad \overline{u_1-1} \quad \overline{u_1-2} \quad \dots \quad \overline{u_1-2} \quad \dots \quad \overline{u_1-2} \quad \dots \quad \overline{u_1-2} \quad \overline{u_1-3} \quad \dots \quad \overline{u_1-3} \quad \dots \quad \overline{u_1-3}$$

$$- \quad \cdots \quad \overline{u_{k-1}} \quad \overline{u_{k-1}} \quad \cdots \quad \overline{u_{k-2}} \quad \cdots \quad \overline{u_2} \quad \cdots \quad \overline{u_1} \quad \overline{u_1} \quad \cdots \quad \overline{u}$$

$$H \quad u$$

!!

GREEDY-SET-COVER

$\ln X$

GREEDY-SET-COVER

H

APPROX-

VERTEX-COVER

arid dash drain heard lost nose

shun slate snare thread

GREEDY-SET-COVER

NP

GREEDY-SET-

COVER

$O \sum_{S \in \mathcal{F}} S$

37.3.

 S, t
$$S \quad x_1, x_2, \dots, x_n$$
 t $S \quad t$

S

 t

NP

 t t t
$$x_1, \dots, x_n$$

3

3

$$L$$
 x $L \quad x$ $\mathcal{X}$
$$L$$
$$L$$

‘ ‘ ‘ ‘

 x
$$L \quad x \quad , \quad , \quad , \quad ,$$
$$S \quad x \quad s \quad x \quad s \in S$$
MERGE-LISTS L, L'
$$L \quad L$$

$$P_i$$

$$x_1,x_2,\ldots,x_i$$

$$P_i\quad P_{i-1}\quad P_{i-1}\quad x_i\quad .$$

$$x_i$$

$$i$$

$$L_i$$

$$P_i$$

$$t$$

$$L_i$$

$$i$$

$$t$$

$$S$$

$$S$$

$$S$$

$$L_i$$

$$\delta$$

$$\delta$$

$$L$$

$$L'$$

$$L'$$

$$L$$

$$y$$

$$L$$

$$L'$$

$$z$$

$$\frac{y-z}{y}\leqslant\delta$$

$$-\delta\leqslant z\leqslant y.$$

$$y$$

$$L$$

$$L'$$

$$L'$$

$$y$$

$$\delta$$

$$\delta\quad ,$$

$$L$$

$$,\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,$$

$$L'$$

$$,\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,$$

$$\delta$$

$$L$$

$$\delta$$

$$\begin{array}{c} L\\ \Theta\ m\end{array}\quad y_1,y_2,\ldots,y_m$$

$$\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2\cup\mathcal{C}_3\cup\mathcal{C}_4\cup\mathcal{C}_5\cup\mathcal{C}_6\cup\mathcal{C}_7\cup\mathcal{C}_8\cup\mathcal{C}_9\cup\mathcal{C}_{10}$$

```
xtsc Trim    L    delta
```

```
    L
```

```
        y
```

```
ast        y
```

```
or i        to m
```

```
do if last          delta y i
```

```
    then          $y i$          L
```

```
        last      y i
```

```
return L
```

L



$$-\varepsilon\,n^{-n}y$$

$\in$

$$-\varepsilon\,u^{-u}\,u$$

$$u$$

$$u\quad n$$

$$-\delta\,,\quad -\delta^2,\ldots,\quad -\delta^n$$

$$\delta$$

$$-n\delta\qquad\qquad\qquad\delta\quad\varepsilon\,n$$

$$L_i$$

$$-\varepsilon\,n$$

$$t$$

$$(-\varepsilon\,n)^t\qquad\qquad\qquad\frac{\ln t}{\ln\, -\varepsilon\,n}\qquad\leqslant$$

$$\leq n\log t$$

a NP

b $S!\sum_{i=1}^n s_i$ S

c

d S

e

f

k G V, E $G^{(k)}$ $V^{(k)}, E^{(k)}$ V
 $v_1, v_2, \dots, v_k$ $w_1, w_2, \dots, w_k$ i v_i
 w_i V $G^{(k)}$
a k G
b C C
 C

S Arora and S Safra Approximating
clique is NP complete in *Proc. of the 33rd IEEE Symp. on Foundation
of Computer Science*, P NP

$\mathcal{F}$

H d d

VERTEX-COVER
M Yannakakis

APPROX-
F Gavril
APPROX-TSP-TOUR

APPROX-SUBSET-SUM

knapsack pr

 C_n^k O notation O Ω notation Ω Θ notation Θ_n^k $\in$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$ ω notation ω $\subset$ $\subseteq$ $\emptyset$

eric relation

eries

aws

efficiency

notation

lly nonnegative

ction

lly tight bound

an object

e running time

robability

ee

orem

ials

acter code

ppy

ion

h

h tree

h tree property

efficients

tribution

pansion

aph

adox

uality

ction

ptotically tight

canonical form

cardinality

Cartesian product

Catalan number

Catalan numbers

ceiling

certain event

chaining

child

chord

circular list

closed interval

code Huffman

codeword

codomain of a function

coefficient

coin

coin changing

collision

coloring

common subsequence

common subsequence longest

commutative laws

comparison sort

compatible activities

complement

complete k ary tree

complete graph

computational problem

conditional probability

conditionally independent
 events

connected component

connected graph

continuous uniform probability
 distribution

contraction

convex polygon

correctness of an algorithm

cost

countably infinite set

cycle simple	endpoint
dag	entropy Shannon
data	equal functions
de Morgan s laws	equal sets
deadline	equivalence class
decision trees	equivalence relation
degree	euclidian travelling salesman problem
depth	Euler s constant
deque	event
descendant	event driven simulation
descendant proper	events conditionally independent
deviation	events independent
dictionary	events mutually independent
difference	
digraph	events pairwise independent
direct addressing	
direct addressing	exchange property
directed graph	executing the subroutine
directed version of an undirected graph	expectation
discrete probability distribution	expected value
discrete random variable	expected running time
disjoint sets	exponential
distribution binomial	exponential series
distribution geometric	extension
distributive laws	exterior
divide and conquer approach	external node
	external path length
division method	
domain of a function	factorial
double hashing	failure
doubly linked list	fair coin
dynamic order statistics	father
dynamic programming	Fibonacci numbers
dynamic set	field of an object
	FIFO
early task	finite sequence
edge	finite set
edit distance	fixed length code
element	flipping a fair coin
elementary event	floor
empty binary tree	forest
empty set	formal power series
empty stack	fractional knapsack problem

free list	heap binary
free tree	heapsort
function	height
function boolean	height of a tree
function generating	hereditary family
function inverse	high endpoint
function linear	hyperedge
function monotonically de creasing increasing	hypergraph
function polylogarithmically bounded	idempotency laws
function polynomially bound ed	image
function quadratic	in degree
function strictly decreasing in creasing	incidence matrix
	incident from
	incident on
	incident to
	incremental approach
	independent events
	independent random variables
garbage collector	
generating function	independent subset
geometric distribution	induced subgraph
geometric series	inequality Boole's
golden ratio	inequality Markov's
graph bipartite	infinite sequence
graph complete	infinite set
graph connected	injection
graph directed	inorder tree walk
graph isomorphic	input
graph simple directed	input size
graph strongly connected	insertion sort
graph undirected	Insertion Sort
graphic matroid	instance
greedoid	integers
greedy algorithm	interior
greedy choice property	internal node
	internal path length
handshaking lemma	intersection
harmonic series	interval tree
hash function	interval graph coloring prob lem
hash table	interval closed
hash value	interval half closed
hashing simple uniform	interval open
head of a list	inverse function
head of a queue	inversions
heap property	
heap d ary	

isomorphic graphs
iterated logarithm
iteration method

join
joint probability density
tion
Josephus permutation

key
knapsack problem
Kraft inequality

late task
LCS longest common
quence

leaf
left child
left subtree
left child right sibling
sentation

length
lexicographically less
LIFO

linear function
linear order
linear probing
linear programming
linear search

linked list
List Delete'
List Delete'LIST-DELETE

List Insert'
List Insert'LIST-INSERT'
List Search'

leue

ic counting

y axioms

y density function

y distribution

y distribution func

on

y theory

y conditional

ance

computational

olution to

cestor

cendant

oset

e

dom number genera

r

function

probing

ority

recurrence	series harmonic
recurrence equation	series telescoping
recursive algorithm	set
red black properties	set operations
red black tree	set countably infinite
reflexive relation	set dynamic
reflexivity	set empty
relation n ary	set finite
relation binary	set infinite
resursion tree	set of integers
right child	set of natural numbers
right subtree	set of real numbers
root of a tree	set partially ordered
root of a binary tree	set uncountable
rooted tree	Shannon entropy
rotation	side
rule of product	simple cycle
rule of sum	simple directed graph
running time	simple path
running time average case	simple polygon
running time expexted	simple uniform hashing
running time worst case	simulation event driven
	singleton
sample space	singly linked list
satellite data	size
schedule	slot
scheduling problem	siblings
search tree	solution to a computational problem
search tree randomly built	son
search binary	sorted list
searching problem	sorting problem
searching linear search	sorting in place
secondary clustering	spanning tree
selection problem	splay tree
selection sort	stable sort
self loop	stack
sentinel	stack depth
sequence finite	standard deviation
sequence infinite	Stirling s approximation
series	strictly decreasing increasing function
series absolutely convergent	
series arithmetic	string
series convergent	strongly connected graph
series divergent	subgraph
series exponential	subpath
series geometric	

subsequence
 subsequence common
 subsequence longest common

 subset of a set
 substitution method
 substring
 subtree rooted at x
 success
 summation formulas
 surjection
 symmetric relation
 symmetry

 tail of a list
 tail of a queue
 tail recursion
 tails of the binomial distribution

 task
 Taylor expansion
 telescoping series
 theorem Bayes's
 top
 total order
 transitive relation
 transitivity
 travelling salesman problem

 tree
 tree k ary
 tree balanced
 tree binary
 tree complete k ary
 tree free
 tree order statistic
 tree ordered
 tree positional
 tree radix
 tree red black
 tree rooted
 triangulation

 uncountable set
 underflow
 undirected graph

 undirected version of a directed graph
 uniform hashing
 uniform probability distribution
 union
 universal hashing
 universe
 unordered pair

 value
 variable length code
 variance
 vertex
 vertex adjacent to u
 vertex reachable
 Viterbi algorithm

 weighted matroid
 weighted median
 worst case running time

 x



k

k



d









k